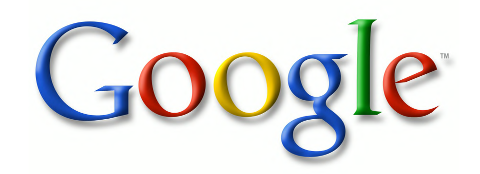








Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Vierundachtzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1878.
Druck und Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des vierundachtzigsten Bandes.

Druckfehler.

p. 19 Z. 6 v. u. sind die beiden letzten Worte „*Q* oder“ zu streichen.
p. 86 Z. 23 statt 9161 lies 9121.
p. 87 Colonne 6 Z. 22 v. u. statt .3236 lies *g* 3236.
p. 87 Colonne 8 Z. 14 v. u. - .4484 - *g* 4484.
p. 88 Colonne 7 Z. 8 - .8484 - *g* 8484.
p. 88 Colonne 8 Z. 4 - .8996 - *g* 8996.

Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen.

(Von Herrn *Frobenius* in Zürich.)

In den Untersuchungen über die Transformation der quadratischen Formen in sich selbst hat man sich bisher auf die Betrachtung des allgemeinen Falles beschränkt, während die Ausnahmen, welche die Resultate in gewissen speciellen Fällen erfahren, nur für die ternären Formen erschöpfend behandelt worden sind (***Bachmann,*** dieses Journal Bd. 76, S. 331; ***Hermite,*** dieses Journal Bd. 78, S. 325). Ich habe daher versucht, die Lücke zu ergänzen, die sich sowohl in dem Beweise der Formeln findet, welche die Herren ***Cayley*** (dieses Journal Bd. 32, S. 119) und ***Hermite*** (dieses Journal Bd. 47, S. 309) für die Coefficienten der Substitution gegeben haben, als auch in den Betrachtungen, welche Herr ***Rosanes*** (dieses Journal Bd. 80, S. 52) über den Charakter der Transformation angestellt hat. Indem ich an Stelle der quadratischen Formen symmetrische bilineare Formen behandelte, wurde ich darauf geführt, meine Untersuchungen auch auf alternirende Formen auszudehnen. Ob für die Transformation jeder bilinearen Form mit cogredienten Variabeln in sich selbst ähnliche rationale Darstellungen existiren, ist eine Frage, die noch der Beantwortung harrt. Ist die Form eine allgemeine, d. h. sind die Wurzeln einer gewissen Gleichung alle unter einander verschieden, ist eine solche Darstellung von Herrn ***Christoffel*** angegeben worden (dieses Journal Bd. 68, S. 260.)

Wird zunächst nur die eine Reihe der Variabeln einer bilinearen Form einer linearen Substitution unterworfen, so gehen in die Ausdrücke für die Coefficienten der transformirten Form die Coefficienten der ursprünglichen Form in der nämlichen Weise ein wie die Substitutionscoefficienten. Betrachtet man also die Form als einen Operandus und die Substitution als eine Operation, die mit der Form vorgenommen wird, so erscheint in dem Resultate der Unterschied zwischen Operandus und Operator in derselben Weise verwischt, wie beim Multipliciren der zwischen dem Multiplicandus und dem Multiplicator oder bei der Rechnung mit Quaternionen der zwischen einem System zweier Strecken im Raume und der Operation des Streckens und Drehens, welche ein solches System in ein anderes über-

führt. Diese Erwägungen leiteten mich darauf, statt der Transformation der bilinearen Formen die Zusammensetzung der linearen Substitutionen zu behandeln.

§. 1. Multiplication.

1. Sind A und B zwei bilineare Formen der Variabeln $x_1, \dots x_n$; $y_1, \dots y_n$, so ist auch

$$P = \Sigma_1^n \frac{\partial A}{\partial y_\varkappa} \frac{\partial B}{\partial x_\varkappa}$$

eine bilineare Form derselben Variabeln. Dieselbe nenne ich aus den Formen A und B (in dieser Reihenfolge) *zusammengesetzt**). Es werden im Folgenden nur solche Operationen mit bilinearen Formen vorgenommen, bei welchen sie bilineare Formen bleiben**). Ich werde z. B. eine Form mit einer Constanten (von x_1, y_1; ... x_n, y_n unabhängigen Grösse) multipliciren, zwei Formen addiren, eine Form, deren Coefficienten von einem Parameter abhängen, nach demselben differentiiren. Ich werde aber nicht zwei Formen mit einander multipliciren. Aus diesem Grunde kann kein Missverständniss entstehen, wenn ich die aus A und B zusammengesetzte Form P mit

$$AB = \Sigma \frac{\partial A}{\partial y_\varkappa} \frac{\partial B}{\partial x_\varkappa}$$

bezeichne, und sie das *Product* der Formen A und B, diese die *Factoren* von P nenne. Für diese Bildung gilt

α) das *distributive* Gesetz:

$$A(B+C) = AB+AC, \qquad (A+B)C = AC+BC,$$
$$(A+B)(C+D) = AC+BC+AD+BD.$$

---

*) *Borchardt,* Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die saeculären Störungen der Planeten bestimmt. Dieses Journal Bd. 30, S. 38.

Cayley, Remarques sur la notation des fonctions algébriques. Dieses Journal Bd. 50, S. 282.

Hesse, Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten. Dieses Journal Bd. 57, S. 175.

Christoffel, Theorie der bilinearen Formen. Dieses Journal Bd. 68, S. 253.

Rosanes, Ueber die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst. Dieses Journal Bd. 80, S. 52.

**) Unter dem Bilde einer bilinearen Form fasse ich ein System von n^2 Grössen zusammen, die nach n Zeilen und n Colonnen geordnet sind. Eine Gleichung zwischen zwei bilinearen Formen repräsentirt daher einen Complex von n^2 Gleichungen. Ich werde bisweilen von dem Bilde der Form absehen und unter dem Zeichen A das System der n^2 Grössen $a_{\alpha\beta}$, unter der Gleichung $A = B$ das System der n^2 Gleichungen $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$ verstehen.

Sind a und b Constanten, so ist

$$(aA)B = A(aB) = a(AB),$$
$$(aA+bB)C = aAC+bBC.$$

β) das *associative* Gesetz:

$$(AB)C = A(BC),$$

daher diese Bildung kurz mit ABC bezeichnet werden kann. Denn AB entsteht, indem in A die Variabeln $y_\varkappa$ durch $\frac{\partial B}{\partial x_\varkappa}$, lineare Functionen von $y_1, \dots y_n$, ersetzt werden, oder indem in B die Variabeln $x_\varkappa$ durch $\frac{\partial A}{\partial y_\varkappa}$, lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$, ersetzt werden. Die Form $(AB)C$ wird also gebildet, indem in B erst die Variabeln $x_\varkappa$ durch die linearen Functionen $\frac{\partial A}{\partial y_\varkappa}$ von $x_1, \dots x_n$ und dann die Variabeln $y_\varkappa$ durch die linearen Functionen $\frac{\partial C}{\partial x_\varkappa}$ von $y_1, \dots y_n$ ersetzt werden. Die Reihenfolge dieser beiden Substitutionen ist aber offenbar gleichgültig.

γ) es gilt aber nicht allgemein das *commutative* Gesetz. Die Formen AB und BA sind im allgemeinen von einander verschieden. Ist $AB = BA$, so heissen die Formen A und B mit einander *vertauschbar*. Aus dem distributiven Gesetze folgt:

I. *Ist jede der Formen $A, B, C, \dots$ mit jeder der Formen $P, Q, R, \dots$ vertauschbar, so ist auch die Form $aA+bB+cC+\cdots$ mit der Form $pP+qQ+rR+\cdots$ vertauschbar.*

Sind ferner B und C beide mit A vertauschbar, so folgt aus dem associativen Gesetze

$$A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A,$$

es ist also auch BC mit A vertauschbar. (Dies ist ein specieller Fall des *Jacobi-Poisson*schen Satzes aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.) Durch wiederholte Anwendung folgt daraus:

II. *Ist jede Form einer Reihe mit jeder Form einer anderen Reihe vertauschbar, so ist auch jede aus den Formen der ersten Reihe zusammengesetzte Form mit jeder aus denen der anderen Reihe zusammengesetzten vertauschbar.*

Eine Form, welche aus mehreren Formen durch die Operationen der Zusammensetzung, Multiplication mit constanten Coefficienten und Ad-

dition (in endlicher Anzahl) gebildet ist, soll eine *ganze Function* jener Formen genannt werden. Aus den obigen Sätzen folgt dann:

III. *Ist jede Form einer Reihe mit jeder Form einer anderen Reihe vertauschbar, so ist auch jede ganze Function der Formen der ersten Reihe mit jeder ganzen Function der Formen der anderen Reihe vertauschbar.*

2. Die Form, welche aus A entsteht, indem die Variabeln $x_1, \dots x_n$ mit $y_1, \dots y_n$ vertauscht werden, heisst die *conjugirte Form* von A (*Jacobi*, dieses Journal Bd. 53, S. 265) und wird im Folgenden stets mit A' bezeichnet werden. Die conjugirte Form von aA ist aA', die von $A+B$ ist $A'+B'$. Die conjugirte Form von

$$AB = \Sigma \frac{\partial A}{\partial y_x} \frac{\partial B}{\partial x_x}$$

ist

$$\Sigma \frac{\partial A'}{\partial x_x} \frac{\partial B'}{\partial y_x} = B'A'.$$

IV. *Ist eine Form aus mehreren zusammengesetzt, so ist die conjugirte Form aus den conjugirten in der umgekehrten Reihenfolge zusammengesetzt.*

Ist A mit B vertauschbar, so ist daher auch A' mit B' vertauschbar. Denn nimmt man in der Gleichung $AB = BA$ auf beiden Seiten die conjugirten Formen, so erhält man $B'A' = A'B'$.

Eine Form heisst *symmetrisch*, wenn sie ihrer conjugirten gleich ist, *alternirend*, wenn sie ihr entgegengesetzt gleich ist. Jede Form kann, und zwar nur in einer Weise, als Summe einer symmetrischen und einer alternirenden Form dargestellt werden. Denn ist $A = S+T$, wo S symmetrisch und T alternirend ist, so ist $A' = S-T$, und daher $S = \frac{1}{2}(A+A')$, $T = \frac{1}{2}(A-A')$.

Die Form $A'A$ ist nach Satz II. symmetrisch. Der Coefficient von $x_\alpha y_\alpha$ in derselben ist $a_{1\alpha}^2 + a_{2\alpha}^2 + \dots + a_{n\alpha}^2$. Sind daher die Coefficienten von A reell, so kann $A'A$ nur dann identisch verschwinden, wenn A Null ist. Sind allgemeiner die entsprechenden Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ der Formen A und B conjugirte complexe Grössen, so kann AB' nur verschwinden, wenn A Null ist. Denn der Coefficient von $x_\alpha y_\alpha$ ist in dieser Form $a_{\alpha 1} b_{\alpha 1} + a_{\alpha 2} b_{\alpha 2} + \dots + a_{\alpha n} b_{\alpha n}$.

3. Die Gleichung $P = AB$ ist eine symbolische Zusammenfassung der n^2 Gleichungen

$$p_{\alpha\beta} = \sum_x a_{\alpha x} b_{x\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n).$$

Mithin ist die Determinante von P, die ich mit $|P|$ bezeichnen werde, gleich dem Producte der Determinanten $|A|$ und $|B|$. Ferner ist jede partiale Determinante m^{ten} Grades von $|P|$ eine Summe von Producten je einer partialen Determinante m^{ten} Grades von $|A|$ und einer partialen Determinante m^{ten} Grades von $|B|$. Durch wiederholte Anwendung dieser Sätze ergiebt sich:

V. *Die Determinante eines Productes mehrerer Formen ist gleich dem Producte der Determinanten der Factoren; jede partiale Determinante m^{ten} Grades der Determinante eines Productes ist eine homogene lineare Function der partialen Determinanten m^{ten} Grades jedes einzelnen Factors.*

Daraus ergeben sich die Folgerungen:

VI. *Wenn die Determinante eines Productes verschwindet, so muss auch die eines Factors verschwinden; wenn in einem Factor eines Productes alle partialen Determinanten m^{ten} Grades verschwinden, so verschwinden sie auch im Producte.*

Speciell ergiebt sich für $m = 2$ und $m = 1$:

VII. *Wenn ein Factor eines Productes in zwei Linearfactoren zerfällt, so zerfällt auch das Product; wenn ein Factor eines Productes verschwindet, so ist auch das Product Null.*

Letzteres gilt aber nicht umgekehrt. Denn wenn z. B. A die Variabeln $y_1, \dots y_m$ und B die Variabeln $x_{m+1} \dots x_n$ nicht enthält, so ist $AB = 0$.

Die Determinante von aA ist $a^n|A|$.

Die Determinante der conjugirten Form A' ist der von A gleich. Die Gesammtheit der partialen Determinanten m^{ten} Grades von $|A'|$ ist mit der Gesammtheit derer von $|A|$ identisch.

§. 2. Division.

1. Ist $A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ eine gegebene Form, so stellen wir uns die Aufgabe, alle Formen $X = \Sigma x_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ zu bestimmen, welche der Gleichung $AX = 0$ genügen. Dieselbe repräsentirt das System der n^2 Gleichungen

$$a_{\alpha 1} x_{1\beta} + a_{\alpha 2} x_{2\beta} + \dots + a_{\alpha n} x_{n\beta} = 0.$$

Ist daher die Determinante der Form A von Null verschieden, so müssen die Grössen $x_{\alpha\beta}$ sämmtlich Null sein.

I. *Ist $AX = 0$ und die Determinante von A nicht Null, so ist $X = 0$.*

Ist also die Determinante von C nicht Null, so folgt aus der Gleichung $AC = BC$, dass $A = B$ ist.

Soll $AX = 0$ sein, so müssen die n Werthereihen

$$x_{1\beta}, \quad x_{2\beta}, \quad \dots \quad x_{n\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \dots . n)$$

Lösungen der n linearen Gleichungen

$$(1.) \qquad a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \dots + a_{\alpha n} x_n = 0 \qquad (\alpha = 1, 2 \dots n)$$

sein. Ist in der Determinante von A der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich m, so haben diese Gleichungen $n-m$ unabhängige Lösungen und nicht mehr. Daher kann in der Determinante von X der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten nicht grösser als $n-m$ sein, und es giebt Lösungen X der Gleichung $AX = 0$, in deren Determinante jener Grad wirklich gleich $n-m$ ist. Ist

$$X = P = \Sigma p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

eine solche Lösung, so befinden sich unter den Werthereihen

$$p_{1\varkappa}, \quad p_{2\varkappa}, \quad \dots \quad p_{n\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

$n-m$ unabhängige (und m von diesen abhängige) Lösungen der linearen Gleichungen (1.). Daher lässt sich jede andere Lösung aus ihnen linear zusammensetzen. Ist also $x_{1\beta}, x_{2\beta}, \dots x_{n\beta}$ irgend eine Lösung der Gleichungen (1.), so ist

$$x_{1\beta} = \sum_\varkappa p_{1\varkappa} q_{\varkappa\beta}, \quad \dots \quad x_{n\beta} = \sum_\varkappa p_{n\varkappa} q_{\varkappa\beta},$$

und folglich ist $X = PQ$.

Ist umgekehrt $X = P$ irgend eine particuläre Lösung der Gleichung $AX = 0$ und Q eine willkürliche Form, so ist $0 = (AP)Q = A(PQ)$, und mithin ist auch $X = PQ$ eine Lösung jener Gleichung.

Wenn die Form $PA = 0$ ist, so ist auch die conjugirte Form $A'P' = 0$. Mithin sind die Lösungen der Gleichung $XA = 0$ die conjugirten Formen von denen der Gleichung $A'X = 0$. Ist also in der Determinante von A der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich m, so ist in keiner Lösung der Gleichung $XA = 0$ jener Grad grösser als $n-m$. Es giebt aber Lösungen, für welche er wirklich gleich $n-m$ ist. Ist P eine solche, und Q eine willkürliche Form, so ist $X = QP$ die allgemeinste Lösung der Gleichung $XA = 0$.

2. Wenn $m = n-1$ ist, wenn also die Determinante von A Null ist, während ihre ersten Unterdeterminanten nicht alle verschwinden, so

zerfällt jede Lösung der Gleichung $AX=0$ oder $XA=0$ in zwei Linearfactoren.

Ist $b_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $a_{\beta\alpha}$ in der Determinante der Form A, so heisst die Form $B=\Sigma b_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ die *adjungirte Form* von A. In dem Producte AB ist der Coefficient von $x_\alpha y_\beta$ gleich $a_{\alpha 1}b_{1\beta}+a_{\alpha 2}b_{2\beta}+\cdots+a_{\alpha n}b_{n\beta}$, also Null oder $|A|$, je nachdem α von β verschieden ist oder nicht; und dasselbe gilt von dem Producte BA. Setzt man also, wie stets im Folgenden geschehen wird,

$$E = \Sigma x_\alpha y_\alpha,$$

so ist

$$(2.)\qquad AB=BA=|A|E.$$

Ist die Determinante von A Null, während ihre ersten Unterdeterminanten nicht alle verschwinden, so ist daher $AB=BA=0$, und B ist nicht identisch Null. Mithin zerfällt B in zwei Linearfactoren, und wenn Q eine willkürliche Form ist, so ist $X=BQ$ $(X=QB)$ die allgemeinste Lösung der Gleichung $AX=0$. $(XA=0)$.

3. Wenn die Determinante der Form A verschwindet, so ist es nicht möglich, der Gleichung

$$(3.)\qquad AX=E \quad\text{oder}\quad XA=E$$

zu genügen, weil die Determinante von $E(=1)$ gleich dem Producte der Determinanten von A und X sein muss.

Wenn aber die Determinante von A nicht verschwindet, so folgt aus (2.), dass $X=B:|A|$ beiden Gleichungen genügt. Auch kann es keine andere Form geben, welche eine der beiden Gleichungen (3.) befriedigt. Denn ist $AX=E$ und $AY=E$, so ist $A(X-Y)=0$ und daher $X-Y=0$ (I.). Die durch die Determinante dividirte adjungirte Form, oder die durch eine der beiden Gleichungen (3.) eindeutig definirte Form soll die *reciproke Form* von A genannt und mit A^{-1} bezeichnet werden. Aus den Gleichungen

$$(4.)\qquad AA^{-1}=E,\quad A^{-1}A=E$$

folgt, dass die Gleichung $XA^{-1}=E$ durch die Form $X=A$ befriedigt wird. Die reciproke Form von der reciproken Form ist daher wieder die ursprüngliche Form. Die conjugirte Form von $AA^{-1}=E$ ist, da E symmetrisch ist, $(A^{-1})'A'=E$. Mithin ist $(A^{-1})'=(A')^{-1}$.

In Folge der Gleichungen (4.) ist das Product der Determinanten von A und von A^{-1} gleich der Determinante von E, also Eins. Die Determinante von A^{-1} ist demnach gleich $|A|^{-1}$.

Aus der Definition der Zusammensetzung ergiebt sich, dass eine Form ungeändert bleibt, wenn sie mit E oder wenn E mit ihr zusammengesetzt wird, dass also

$$(5.)\qquad AE = EA = A$$

ist.

Sind die Determinanten von A und B von Null verschieden, so ist $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$, es genügt also $X = B^{-1}A^{-1}$ der Gleichung $(AB)X = E$ und ist folglich die reciproke Form von AB.

II. *Ist eine Form von nicht verschwindender Determinante aus mehreren zusammengesetzt, so ist die reciproke Form aus den reciproken Formen in der umgekehrten Reihenfolge zusammengesetzt.*

4. Ist die Determinante von A nicht Null, so hat die Gleichung $AX = B$ stets eine Lösung $X = A^{-1}B$ und keine andere. Ist aber jene Determinante Null, so hat sie nur unter gewissen Bedingungen eine Lösung, dann aber unzählig viele, die man aus einer erhält, indem man zu ihr die Lösungen der Gleichung $AX = 0$ addirt. Jene Bedingungen lassen sich dahin zusammenfassen, dass alle Lösungen der linearen Gleichungen $\frac{\partial A}{\partial y_1} = 0, \ldots \frac{\partial A}{\partial y_n} = 0$ auch die Gleichungen $\frac{\partial B}{\partial y_1} = 0, \ldots \frac{\partial B}{\partial y_n} = 0$ befriedigen müssen, oder dass in dem Elementensystem

$$\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_{n1} & \ldots & b_{nn}, \end{matrix}$$

der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten eben so gross sein muss, wie in der Determinante von A.

5. Ist A mit B vertauschbar, und die Determinante von B nicht Null, so ist

$$AB^{-1} = (B^{-1}B)(AB^{-1}) = B^{-1}(BA)B^{-1} = B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}A,$$

und mithin ist A auch mit B^{-1} vertauschbar. Daher soll die Form

$$AB^{-1} = B^{-1}A = \frac{A}{B}$$

gesetzt und als der Quotient von A durch B bezeichnet werden. Bei Formen, die nicht vertauschbar sind, werden wir aber das Zeichen des Quotienten nicht anwenden.

Da die Determinante von B^{-1} gleich $|B|^{-1}$ ist, so ist die Determinante eines Quotienten zweier Formen gleich dem Quotienten ihrer Determinanten.

Die conjugirte Form von $\frac{A}{B}$ ist $\frac{A'}{B'}$. Sind die Determinanten von A und B beide von Null verschieden, so ist die reciproke Form von $\frac{A}{B}$ gleich $\frac{B}{A}$. Sind A, B, C irgend drei Formen, B und C von nicht verschwindender Determinante, so ist

$$AB^{-1} = ACC^{-1}B^{-1} = (AC)(BC)^{-1},$$
$$B^{-1}A = B^{-1}C^{-1}CA = (CB)^{-1}(CA).$$

Sind also je zwei dieser Formen vertauschbar, so ist

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{CB} = \frac{CA}{BC} = \frac{CA}{CB}.$$

§. 3. Rationale Functionen.

1. Die Form, welche man erhält, indem man α mal A mit sich selbst zusammensetzt, wird mit A^α bezeichnet und die α^{te} *Potenz* von A genannt. Durch wiederholte Anwendung des associativen Gesetzes ergiebt sich (vgl. *Borchardt,* dieses Journal, Bd. 30, S. 42) die Formel

$$(1.)\qquad A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}.$$

Dieselbe bleibt, wenn man

$$A^0 = E$$

setzt, nach §. 2., Formel (5.) auch richtig, wenn einer der beiden Exponenten oder beide Null sind. Ist die Determinante von A nicht Null, so entsteht, indem α mal A^{-1} mit sich selbst zusammengesetzt wird, eine Form, die mit $A^{-\alpha}$ bezeichnet wird. Dann ist leicht zu zeigen, dass die Gleichung (1.) auch für negative Werthe der Exponenten richtig bleibt. Mithin ist $A^{-\alpha}$ die reciproke Form von A^α. Für positive und negative Werthe des Exponenten ist $E^\alpha = E$. Ist a eine Constante, so ist $(aA)^\alpha = a^\alpha A^\alpha$.

Ist $g(r) = a_0 + a_1 r + \cdots + a_m r^m$ eine ganze Function von r, so heisst die Form $a_0 A^0 + a_1 A^1 + \cdots + a_m A^m$ eine *ganze Function m^{ten} Grades* von A und wird mit $g(A)$ bezeichnet. Nach §. 1. Satz III. ist jede ganze Function $g(A)$ von A mit jeder andern ganzen Function $h(A)$ vertauschbar. Ist die Determinante von $h(A)$ von Null verschieden, so heisst der Quotient $\frac{g(A)}{h(A)}$ eine *rationale Function* von A, und wird, wenn $\frac{g(r)}{h(r)} = f(r)$ ist, mit $f(A)$ bezeichnet.

Nach §. 1. Satz IV. ist die conjugirte Form von A^α gleich A'^α und daher die von $g(A) = \Sigma a_\alpha A^\alpha$ gleich $g(A')$. Da ferner die conjugirte Form eines Quotienten gleich dem Quotienten der conjugirten Formen ist, so ist die conjugirte Form einer rationalen Function $f(A)$ gleich $f(A')$. Jede rationale Function einer symmetrischen Form ist wieder symmetrisch. Von einer alternirenden Form ist jede gerade Function symmetrisch, jede ungerade alternirend.

Ist A mit B vertauschbar, so ist auch jede ganze Function $g(A)$ mit jeder ganzen Function $G(B)$ vertauschbar (§. 1. Satz III.). Sind ferner die Determinanten der ganzen Functionen $h(A)$ und $H(B)$ von Null verschieden, so ist auch $(h(A))^{-1}$ mit $(H(B))^{-1}$ vertauschbar; folglich ist auch $g(A)(h(A))^{-1}$ mit $G(B)(H(B))^{-1}$ vertauschbar.

I. *Sind zwei Formen vertauschbar, so ist auch jede rationale Function der einen mit jeder rationalen Function der andern vertauschbar.*

Je zwei rationale Functionen derselben Form sind mit einander vertauschbar.

Nach §. 1. Satz V. ist die Determinante von A^α gleich $|A|^\alpha$. Da die Determinante von A^{-1} gleich $|A|^{-1}$ ist, so gilt dies auch für negative Werthe des Exponenten. Die Determinante von $rE-A$ ist eine ganze Function n^{ten} Grades von r und soll die *charakteristische Determinante* oder *Function* von A genannt werden (*Cauchy*, Mémoire sur l'intégration des équations linéaires; Exerc. d'analyse et de phys. math. tome I., p. 53.). Ich setze

$$\varphi(r) = |rE-A| = (r-r_1)(r-r_2)\dots(r-r_n),$$

bezeichne also mit $r_1, r_2, \dots r_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A, jede so oft gezählt, wie ihre Ordnungszahl angiebt. Ist

$$g(r) = a_0 r^m + a_1 r^{m-1} + \dots + a_m = a(s_1-r)\dots(s_m-r)$$

eine ganze Function von r, so ist offenbar

$$g(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m A^0 = a(s_1 E - A)\dots(s_m E - A).$$

Da die Determinante eines Productes gleich dem Producte der Determinanten der Factoren ist, so ist folglich

$$|g(A)| = a^n |s_1 E - A| \dots |s_m E - A| = a^n \varphi(s_1)\dots\varphi(s_m)$$
$$= a(s_1-r_1)\dots(s_m-r_1)\dots a(s_1-r_n)\dots(s_m-r_n) = g(r_1)\dots g(r_n).$$

Da ferner die Determinante eines Quotienten $f(A) = \frac{g(A)}{h(A)}$ gleich dem Quotienten der Determinanten ist, so ist

$$|f(A)| = \frac{g(r_1)\dots g(r_n)}{h(r_1)\dots h(r_n)} = f(r_1)\dots f(r_n).$$

II. *Sind $r_1, r_2, \dots r_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer Form A, so ist die Determinante einer rationalen Function $f(A)$ von A gleich $f(r_1)f(r_2)\dots f(r_n)$.*

Die Determinante einer ganzen Function $g(A)$ ist die Resultante von $g(r)$ und der charakteristischen Function von A.

Wendet man den ersten Satz auf die Form $rE-f(A)$ an, so ergiebt sich (vgl. *Borchardt*, dieses Journal Bd. 30, S. 41), dass die Determinante derselben gleich $(r-f(r_1))\dots(r-f(r_n))$ ist:

III. *Sind $r_1, r_2, \dots r_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A, so sind $f(r_1), f(r_2), \dots f(r_n)$ die der charakteristischen Gleichung von $f(A)$.*

2. Mehrere Formen $A, B, C, \dots$ heissen *unabhängig*, wenn die Gleichung $aA+bB+cC+\dots=0$ erfordert, dass die Constanten $a, b, c, \dots$ sämmtlich verschwinden. Da eine Form n^2 Coefficienten hat, so giebt es genau n^2 unabhängige Formen. Daher können die Potenzen einer Form nicht alle unabhängig sein. Seien $A^0, A^1, \dots A^{p-1}$ unabhängig, sei dagegen A^p mit ihnen durch eine Relation

$$(2.)\qquad \psi(A) = a_0A^0+a_1A^1+\dots+a_pA^p = 0$$

verbunden, wo a_p von Null verschieden ist, während die übrigen Coefficienten zum Theil oder alle verschwinden können. Setzt man diese (verschwindende) Form mit A^ν zusammen, so erhält man

$$a_0A^\nu+a_1A^{\nu+1}+\dots+a_pA^{\nu+p} = 0.$$

Wenn man daher die für hinreichend grosse Werthe von r convergente Reihe

$$S = \frac{A^0}{r}+\frac{A^1}{r^2}+\frac{A^2}{r^3}+\cdots$$

mit der ganzen Function p^{ten} Grades

$$\psi(r) = a_0+a_1r+\dots+a_pr^p$$

multiplicirt, so heben sich die negativen Potenzen von r, und man erhält eine ganze Function $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades $G(r)$ (d. h. eine Form, deren Coefficienten ganze Functionen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von r sind).

Der rationale echte Bruch $\frac{G(r)}{\psi(r)}$, der sich so für die recurrente Reihe S ergiebt, ist irreductibel. Denn wäre er gleich einem anderen, dessen Nenner $\chi(r)$ vom Grade $q<p$ wäre, so würde sich durch Multipli-

cation von S mit $\chi(r)$ und Coefficientenvergleichung ergeben, dass bereits zwischen $A^0, A^1, \dots A^q$ eine Gleichung bestände, wider die Voraussetzung.

Die Reihe S ist leicht zu summiren. Denn es ist

$$S\,A = \qquad \frac{A}{r}+\frac{A^2}{r^2}+\cdots$$

$$SrE = A^0+\frac{A}{r}+\frac{A^2}{r^2}+\cdots$$

und daher (vgl. *Christoffel*, dieses Journal Bd. 68, S. 272.)

$$S(rE-A) = A^0 = E,\quad S = (rE-A)^{-1},$$

also

$$(3.)\quad \frac{A^0}{r}+\frac{A^1}{r^2}+\frac{A^2}{r^3}+\cdots = (rE-A)^{-1} = \frac{F(r)}{\varphi(r)},$$

wo

$$(-1)^n F(r) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & a_{11}-r & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ y_n & a_{n1} & \dots & a_{nn}-r \end{vmatrix},\quad (-1)^n \varphi(r) = \begin{vmatrix} a_{11}-r & \dots & a_{1n} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-r \end{vmatrix}$$

ist. Der grösste gemeinsame Theiler des Zählers und des Nenners von S ist der grösste gemeinsame Theiler der ersten Unterdeterminanten von $\varphi(r)$. Ist derselbe eine ganze Function m^{ten} Grades von r, so ist der Nenner $\psi(r)$ des reducirten Bruches vom Grade $n-m=p$. Nach den obigen Erörterungen sind daher unter den Formen $A^0, A^1, A^2, \dots$ die ersten p unabhängig, alle folgenden von diesen abhängig.

Ist $r=a$ eine αfache Wurzel der charakteristischen Gleichung $\varphi(r)=0$ von A, so ist der grösste gemeinsame Divisor der ersten Unterdeterminanten von $\varphi(r)$ entweder nicht durch $r-a$ theilbar, oder durch eine niedrigere Potenz als die α^{te}. Daher verschwindet $\varphi(r)$ für dieselben Werthe, wie $\psi(r)$, nur möglicherweise für einige derselben von höherer Ordnung, und für einen Werth, für welchen $\psi(r)$ nicht Null ist, kann auch $\varphi(r)$ nicht verschwinden.

Ist die Determinante von A nicht Null, so kann das constante Glied von $\psi(r)$ nicht verschwinden. Denn sonst erhielte man durch Zusammensetzung von $\psi(A)$ mit A^{-1} eine ganze Function niedrigeren Grades von A, die Null wäre. In diesem Falle sind unter allen positiven und negativen Potenzen von A irgend $n-m=p$ auf einander folgende unabhängig, alle anderen von diesen abhängig.

3. Nach Formel (2.) genügt jede Form A einer gewissen Gleichung, und der Grad der Gleichung niedrigsten Grades $\psi(A) = 0$ ist nicht grösser als n. Ist $f(r)$ eine durch $\psi(r)$ theilbare ganze Function, $f(r) = \psi(r)\chi(r)$, so ist $f(A) = \psi(A)\chi(A) = 0$. Da die charakteristische Function $\varphi(r)$ durch $\psi(r)$ theilbar ist, so ist folglich stets $\varphi(A) = 0$. Sind $f(r)$ und $g(r)$ irgend zwei ganze Functionen von r, und ist $h(r)$ ihr grösster gemeinsamer Divisor, so lassen sich zwei ganze Functionen $F(r)$ und $G(r)$ so bestimmen, dass $f(r)G(r) - g(r)F(r) = h(r)$ ist. Daher ist auch $f(A)G(A) - g(A)F(A) = h(A)$. Genügt also A den Gleichungen $f(A) = 0$ und $g(A) = 0$, so muss es auch die Gleichung $h(A) = 0$ befriedrigen.

Wenn daher A der Gleichung $f(A) = 0$ genügt, so muss $f(r)$ durch $\psi(r)$ theilbar sein. Denn wäre $\chi(r)$ der grösste gemeinsame Divisor von $f(r)$ und $\psi(r)$, so wäre $\chi(A) = 0$, während doch $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades ist, der A genügt. Wenn eine rationale Function $f(A) = \frac{g(A)}{h(A)}$ verschwindet, so muss $g(A) = 0$ sein, weil die Determinante von $(h(A))^{-1}$ von Null verschieden ist. Daher ist $g(r)$ durch $\psi(r)$ theilbar. Für eine αfache Wurzel der Gleichung $\psi(r) = 0$ muss folglich $f(r)$ nebst den ersten $\alpha - 1$ Ableitungen verschwinden.

Mit Hülfe der Gleichung p^{ten} Grades $\psi(A) = 0$ kann jede ganze Function von A als eine ganze Function höchstens $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades dargestellt werden. Sei ferner $f(A) = \frac{g(A)}{h(A)}$ irgend eine rationale Function von A. Die Determinante von $h(A)$ ist $h(r_1)h(r_2)\dots h(r_n)$. Da dieselbe von Null verschieden ist, so hat $h(r)$ mit $\varphi(r)$, also auch mit $\psi(r)$ keinen Theiler gemeinsam. Daher lassen sich zwei ganze Functionen $F(r)$ und $G(r)$ so bestimmen, dass $h(r)F(r) - \psi(r)G(r) = g(r)$ ist. Mithin ist auch $h(A)F(A) - \psi(A)G(A) = g(A)$ oder, weil $\psi(A) = 0$ ist, $F(A) = \frac{g(A)}{h(A)}$. Jede gebrochene rationale Function von A lässt sich also auch als ganze Function von A darstellen. Trotzdem werden wir uns der rationalen Functionen bedienen, weil in vielen Fällen die gebrochene Form bequemer ist.

Sei $B = h(A)$ eine rationale Function von A. Dieselbe ist gleich einer ganzen Function $f(A)$. Da die rationale Function $h(A) - f(A)$ verschwindet, so ist für jede Wurzel der Gleichung $\psi(r) = 0$ auch $h(r) - f(r) = 0$, und für eine αfache Wurzel dieser Gleichung stimmen auch die ersten $\alpha - 1$ Ableitungen von $h(r)$ und $f(r)$ überein. Ist $\psi(r) = (r-r_1)(r-r_2)\dots(r-r_p)$,

so ist $(f(r)-f(r_1))\dots(f(r)-f(r_p))$ durch $\psi(r)$ theilbar, und daher ist $(f(A)-f(r_1)E)\dots(f(A)-f(r_p)E)=0$, oder $(B-h(r_1)E)\dots(B-h(r_p)E)=0$. Daher genügt B ebenfalls einer Gleichung p^{ten} Grades. Wenn nun diese Form nicht einer Gleichung niedrigeren Grades genügt, so lässt sich auch A als rationale Function von B darstellen. Denn $f(A)$, $(f(A))^2$, $(f(A))^3$, ... lassen sich als ganze Functionen höchstens $(p-1)^{ten}$ Grades $f_1(A), f_2(A), f_3(A), \dots$ darstellen. Betrachtet man in den p Gleichungen $B^0=A^0, B^1=f_1(A), \dots B^{p-1}=f_{p-1}(A)$ die Formen $A^0, A^1, \dots A^{p-1}$ als die Unbekannten, so ist ihre Determinante nicht Null. Denn sonst würde zwischen ihren rechten Seiten eine Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen, während $B^0, B^1, \dots B^{p-1}$ als unabhängig vorausgesetzt sind. Durch Auflösung dieser linearen Gleichungen ergiebt sich daher $A=g(B)$, wo $g(r)$ eine ganze Function ist.

Aus dieser Gleichung und aus $B=f(A)$ folgt $g(f(A))=A$. Daher ist $g(f(r))-r$ durch $\psi(r)$ theilbar. Sind a und b zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $\psi(r)=0$, so sind folglich $f(a)$ und $f(b)$ verschieden, weil sonst auch $g(f(a))=a$ und $g(f(b))=b$ gleich sein würden. Ist ferner r eine mehrfache Wurzel jener Gleichung, so ist für dieselbe $g'(f(r))f'(r)-1=0$ und daher ist $f'(r)$ von Null verschieden. Es lässt sich zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind, dass also der Satz gilt:

IV. *Damit eine ganze Function $g(r)$ so bestimmt werden könne, dass $g(f(r))-r$ durch $\psi(r)$ theilbar ist, wo $f(r)$ und $\psi(r)$ zwei gegebene ganze Functionen sind, ist nothwendig und hinreichend, dass $f(r)$ für je zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $\psi(r)=0$ verschiedene Werthe habe, und $f'(r)$ für keine mehrfache Wurzel jener Gleichung verschwinde.*

Daraus ergiebt sich dann unmittelbar der Satz:

V. *Ist $\psi(A)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt, und $B=f(A)$ eine rationale Function von A, so ist stets und nur dann auch A eine rationale Function von B, wenn $f(r)$ für die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\psi(r)=0$ verschiedene Werthe hat und $f'(r)$ für die mehrfachen Wurzeln jener Gleichung nicht verschwindet.*

Für diesen Satz wird sich später (§. 7.) aus der Formentheorie selbst ein einfacher Beweis ergeben. Daher will ich hier auf den Beweis des obigen algebraischen Hülfssatzes nicht näher eingehen.

4. Aus den entwickelten Sätzen ergiebt sich eine Methode, eine Form X zu bestimmen, welche einer gegebenen Gleichung $f(X)=0$ genügt. Wir wollen dieselbe an ein Paar Beispielen erläutern.

Es giebt Formen, die nicht Null sind, von denen aber eine Potenz verschwindet. Ist X^p die niedrigste Potenz von X, welche verschwindet, so ist auch jede höhere Potenz von X gleich Null. Ist $\psi(X)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der X genügt, so ist $\psi(r)$ ein Divisor von r^p, also eine Potenz von r, folglich gleich r^ρ; da die charakteristische Function $\varphi(r)$ von X nur für Werthe verschwindet, für die auch $\psi(r)=0$ ist, so muss $\varphi(r)=r^n$ sein. Da umgekehrt stets $\varphi(X)=0$ ist, so ergiebt sich der Satz:

VI. *Damit eine Potenz einer Form verschwinde, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre charakteristische Function gleich r^n ist.*

Da $|X|^p=0$ ist, so ist auch $|X|=0$. Wenn auch die ersten Unterdeterminanten von $|X|$ sämmtlich verschwinden, und wenn r^m der grösste gemeinsame Divisor der ersten Unterdeterminanten von $|rE-X|$ ist, so ist $p=n-m$. Je nachdem daher $p<n$ oder $p=n$ ist, sind die ersten Unterdeterminanten von $|X|$ alle oder nicht alle Null. Ist eine Potenz von X gleich Null, und ist $k>1$, so ist von der Form X^k eine niedrigere als die n^{te} Potenz Null. Daher müssen in dieser Form die ersten Unterdeterminanten sämmtlich verschwinden.

Setzt man in der Gleichung $\varphi(r)=r^n$ die Grösse $r=-1$, so erhält man $|X+E|=1$. Ist A eine Form, die mit X vertauschbar ist, und s eine unbestimmte Zahl, so ist auch $(A+sE)^{-1}$ mit X vertauschbar. Setzt man daher $(A+sE)^{-1}X=B$, so ist $B^p=(A+sE)^{-p}X^p=0$, und folglich ist $|B+E|=1$. Nun ist aber $(A+sE)(B+E)=X+A+sE$ und mithin

$$|X+A+sE| = |A+sE|.$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind ganze Functionen von s. Setzt man in denselben $s=0$, so erhält man den Satz:

VII. *Ist die Form A mit der Form X vertauschbar, von der eine Potenz verschwindet, so ist die Determinante von $A+X$ der von A gleich.*

Als zweites Beispiel behandle ich die Aufgabe, die Formen zu bestimmen, unter deren Potenzen nur eine endliche Anzahl verschieden sind. Unter den Formen X^0, X^1, ... sei $X^{\varkappa+\lambda}$ die erste, welche einer vorhergehenden gleich ist, und zwar sei $X^{\varkappa+\lambda}=X^\varkappa$ oder $X^\varkappa(X^\lambda-E)=0$. Ist $\psi(X)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der X genügt, so ist $\psi(r)$ ein Divisor von $r^\varkappa(r^\lambda-1)$, verschwindet also nur für $r=0$ und für Einheitswurzeln und für letztere nur von der ersten Ordnung. Daher verschwindet auch die charakteristische Determinante $\varphi(r)$ von X nur für $r=0$ und für

Einheitswurzeln; und ist a eine Einheitswurzel, für welche $\varphi(r)$ von der α^{ten} Ordnung verschwindet, so müssen die ersten Unterdeterminanten von $\varphi(r)$ für $r=a$ alle von der $(\alpha-1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden. Bedient man sich daher des Begriffs der Elementartheiler (§. 6.), so erhält man den Satz:

VIII. *Damit unter den Potenzen einer Form nur eine endliche Anzahl verschieden seien, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre charakteristische Determinante nur für den Werth Null und für Einheitswurzeln verschwindet, und dass diejenigen ihrer Elementartheiler, die für letztere verschwinden, sämmtlich einfach seien.*

5. Ist $\varphi(r)$ die charakteristische Function der Form A und

$$\frac{\varphi(r)-\varphi(s)}{r-s} = \varphi_0(r)s^{n-1}+\varphi_1(r)s^{n-2}+\cdots+\varphi_{n-1}(r),$$

so ist

$$\frac{\varphi(r)E-\varphi(A)}{rE-A} = \varphi_0(r)A^{n-1}+\varphi_1(r)A^{n-2}+\cdots+\varphi_{n-1}(r)E,$$

oder weil $\varphi(A)=0$ ist,

$$(4.)\qquad \frac{E}{rE-A} = \frac{\varphi_0(r)}{\varphi(r)}A^{n-1}+\frac{\varphi_1(r)}{\varphi(r)}A^{n-2}+\cdots+\frac{\varphi_{n-1}(r)}{\varphi(r)}E.$$

Man findet daher die Entwickelung von $(rE-A)^{-1}$ nach Potenzen von $r-a$ oder nach irgend welchen Functionen von r, indem man die Entwickelungen von $\frac{\varphi_0(r)}{\varphi(r)}, \dots$ in diese Formel einsetzt. Daraus folgt:

IX. *In jeder Entwickelung von $(rE-A)^{-1}$ nach Functionen von r, die nur in einer Weise möglich ist, sind die Coefficienten ganze Functionen von A.*

Aus der Formel

$$(5.)\qquad \frac{\varphi(r)E}{rE-A} = \varphi_0(A)r^{n-1}+\varphi_1(A)r^{n-2}+\cdots+\varphi_{n-1}(A)$$

ergiebt sich der Satz:

X. *Die adjungirte Form von $rE-A$ ist eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von r, deren Coefficienten ganze Functionen von A sind.*

§. 4. Differentiation.

Wenn die Coefficienten einer Form $A=\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ Functionen eines Parameters r sind, so ist das Differential (die Ableitung) der Form $dA=\Sigma(da_{\alpha\beta})x_\alpha y_\beta$ wieder eine bilineare Form. Ferner ist

$$d(AB) = d\Sigma\frac{\partial A}{\partial y_\varkappa}\frac{\partial B}{\partial x_\varkappa} = \Sigma\frac{\partial(dA)}{\partial y_\varkappa}\frac{\partial B}{\partial x_\varkappa}+\frac{\partial A}{\partial y_\varkappa}\frac{\partial(dB)}{\partial x_\varkappa}$$

oder

$$(1.)\quad d(AB) = (dA)B + A(dB).$$

Daher ist

$$d(A^2) = (dA)A + A(dA).$$
$$d(ABC) = (dA)BC + A(dB)C + AB(dC).$$
$$d(A^\alpha) = (dA)A^{\alpha-1} + A(dA)A^{\alpha-2} + A^2(dA)A^{\alpha-3} + \cdots + A^{\alpha-1}(dA).$$

Ferner ist, da die Coefficienten der Form E von r unabhängig sind,

$$d(A^0) = dE = 0$$

und mithin

$$0 = d(AA^{-1}) = Ad(A^{-1}) + (dA)A^{-1},$$

also

$$(2.)\quad d(A^{-1}) = -A^{-1}(dA)A^{-1}.$$

(*Weierstrass, B. M.**) 1858, S. 214). Z. B. ist, wenn die Coefficienten von A nicht von r abhängen,

$$(3.)\quad \frac{d(rE-A)^{-1}}{dr} = -(rE-A)^{-1}E(rE-A)^{-1} = -(rE-A)^{-2}.$$

Ferner ist, wenn die Coefficienten von A Functionen von r sind,

$$d(A^{-\alpha}) = -A^{-\alpha}(dA^\alpha)A^{-\alpha},$$

oder

$$-d(A^{-\alpha}) = A^{-\alpha}(dA)A^{-1} + A^{-(\alpha-1)}(dA)A^{-2} + \cdots + A^{-1}(dA)A^{-\alpha}.$$

§. 5. Zerlegbare Formen.

Wenn die Variabeln $x_\alpha, x_\beta, \ldots$ in der Form A nicht vorkommen, so fehlen sie auch in AB und folglich auch in $ABCD = A(BCD)$. Wenn die Variabeln $y_\varkappa, y_\lambda, \ldots$ in D nicht vorkommen, so fehlen sie auch in CD und folglich auch in $ABCD$.

I. *In einem Producte fehlen die Variabeln x, welche im ersten Factor, und die Variabeln y, welche im letzten Factor nicht vorkommen.*

Ist A mit B vertauschbar, so fehlen in $P = AB$ die Variabeln x, und in $P = BA$ die Variabeln y, welche in A nicht vorkommen.

II. *In dem Producte von zwei oder mehreren vertauschbaren Formen kommen alle die Variabeln nicht vor, welche in einem der Factoren fehlen.*

Eine Form heisst *zerlegbar*, wenn sie die Summe mehrerer Formen ist, von denen nicht zwei ein Variabelnpaar gemeinsam haben. Sind also $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$ die *Theile* der zerlegbaren Form A, und kommt das Va-

*) Mit *B. M.* citire ich die Monatsberichte der Berliner Academie.

riabelnpaar x_1, y_1 in A_1 vor (d. h. fehlen diese Veränderlichen nicht beide in A_1), so kommt weder x_1 noch y_1 in einer der Formen A_2, A_3, ... vor. Die Determinante einer zerlegbaren Form ist gleich dem Producte der Determinanten der einzelnen Theile. Die charakteristische Function einer zerlegbaren Form ist gleich dem Producte der charakteristischen Functionen der einzelnen Theile. Ist A in die Theile $A_1+A_2+\cdots$ und B in $B_1+B_2+\cdots$ zerlegbar, enthält B_1 die nämlichen Variabelnpaare wie A_1, B_2 die nämlichen wie A_2, u. s. w., so heisst B in derselben Weise zerlegbar wie A. Dabei ist nicht nothwendig, dass B_ϱ die sämmtlichen Variabelnpaare, welche in A_ϱ vorkommen, wirklich enthalte.

Die Form E ist in jeder beliebigen Weise zerlegbar. Ist A zerlegbar, so ist die conjugirte Form A' in derselben Weise zerlegbar. Sind A und B in gleicher Weise zerlegbar, so ist auch $A+B$ in derselben Weise zerlegbar. Sei $A=\Sigma A_\varrho$ und $B=\Sigma B_\varrho$, wo die entsprechenden Theile (welche die nämlichen Variabelnpaare enthalten) mit demselben Index bezeichnet sind. Dann ist, falls ϱ und σ verschieden sind, $A_\varrho B_\sigma=0$, weil in B_σ alle Variabelnpaare fehlen, die in A_ϱ vorkommen. Mithin ist $AB=\Sigma A_\varrho B_\varrho$. Da das Product $A_\varrho B_\varrho$ nur solche Variabelnpaare enthält, welche in A_ϱ und B_ϱ vorkommen, so folgt daraus:

III. ***Sind mehrere Formen in gleicher Weise zerlegbar, so ist ihr Product in derselben Weise zerlegbar.***

Ist daher eine Form zerlegbar, so ist auch jede Potenz derselben in der nämlichen Weise zerlegbar. Ist die Determinante der Form von Null verschieden, so gilt dieser Satz auch für negative Potenzen. Denn da die Determinante der zerlegbaren Form $A=\Sigma A_\varrho$ gleich dem Producte der Determinanten der einzelnen Theile ist, so ist unter der gemachten Voraussetzung auch die Determinante von A_ϱ nicht Null. Wird die Form E auf dieselbe Weise wie A in ΣE_ϱ zerlegt, so giebt es folglich eine Form B_ϱ, welche der Gleichung $A_\varrho B_\varrho=E_\varrho$ genügt, und dieselben Variabelnpaare enthält wie A_ϱ und E_ϱ. Daher ist, falls ϱ und σ verschieden sind, $A_\varrho B_\sigma=0$ und mithin

$$\Sigma A_\varrho \Sigma B_\varrho=\Sigma A_\varrho B_\varrho=\Sigma E_\varrho=E.$$

Es ist also die Form $\Sigma B_\varrho=A^{-1}$ in derselben Weise wie A zerlegbar.

Sind zwei in derselben Weise zerlegbare Formen $A=\Sigma A_\varrho$ und $B=\Sigma B_\varrho$ vertauschbar, so ist $\Sigma A_\varrho B_\varrho=\Sigma B_\varrho A_\varrho$ und daher $A_\varrho B_\varrho=B_\varrho A_\varrho$. Da ferner $A_\varrho B_\sigma=B_\sigma A_\varrho=0$ ist, so ist jeder Theil von A mit jedem Theile

von B vertauschbar. Ist ferner die Determinante von B von Null verschieden, so ist A auch mit $B^{-1} = \Sigma B_\varrho^{-1}$ vertauschbar, wo unter B_ϱ^{-1} diejenige Form Y_ϱ zu verstehen ist, welche der Gleichung $A_\varrho Y_\varrho = E_\varrho$ (nicht E) genügt. Mithin ist $\frac{A}{B} = \Sigma \frac{A_\varrho}{B_\varrho}$, wo das Zeichen $\frac{A_\varrho}{B_\varrho}$ diejenige Form X_ϱ bezeichnet, welche die Gleichung $A_\varrho = B_\varrho X_\varrho$ befriedigt. Da $A^\alpha = \sum\limits_\varrho A_\varrho^\alpha$ ist, so ist auch $\sum\limits_\alpha a_\alpha A^\alpha = \sum\limits_\varrho (\sum\limits_\alpha a_\alpha A_\varrho^\alpha)$, also, wenn $g(r)$ eine ganze Function ist, $g(A) = \Sigma g(A_\varrho)$. Ist $h(A)$ eine andere ganze Function von nicht verschwindender Determinante, so ist auch $h(A) = \Sigma h(A_\varrho)$ und daher

$$(1.) \qquad f(A) = \frac{g(A)}{h(A)} = \Sigma \frac{g(A_\varrho)}{h(A_\varrho)} = \Sigma f(A_\varrho).$$

Ist also eine Form zerlegbar, so ist jede rationale Function derselben in der nämlichen Weise zerlegbar.

§. 6. Aequivalenz.

Eine Form B heisst einer Form A *äquivalent*, wenn zwei Formen P und Q von nicht verschwindender Determinante bestimmt werden können, welche der Gleichung

$$PAQ = B$$

genügen, und welche ausserdem noch einer weiteren Beschränkung unterworfen sein können. Dieselbe muss aber der Art sein, dass A mit B äquivalent ist, wenn es B mit A ist, und dass zwei Formen, die einer dritten äquivalent sind, es auch unter einander sind. (Mündliche Mittheilung des Herrn *Kronecker*). P und Q heissen die *Substitutionen*, durch welche A in B übergeht. Alle Formen, die einer bestimmten äquivalent sind, bilden eine *Klasse* von Formen.

Jene Beschränkung kann z. B. darin bestehen, dass P gleich Q oder Q' oder Q^{-1} sein soll *), oder dass P und Q einen Parameter nicht enthalten sollen, der in A und B vorkommt. Nachdem so der Begriff der Aequivalenz fixirt ist, heisst eine Form *elementar* oder *irreductibel*, wenn sie weder selbst zerlegbar, noch einer zerlegbaren äquivalent ist, *reductibel* im entgegengesetzten Falle **) (*Kronecker*, *B. M.* 1874, S. 441). Aus dieser

*) Ist $P = Q'$, so heissen die beiden Substitutionen *cogredient*, ist $P = Q^{-1}$, so heissen sie *contragredient*.

**) Man überzeugt sich leicht, dass es durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen möglich ist zu entscheiden, ob eine numerisch gegebene Form irreductibel ist oder nicht. Ohne diesen Nachweis würden die obigen allgemeinen Definitionen vage sein.

Definition folgt, dass jede Form einer solchen äquivalent ist, die in lauter elementare zerlegt werden kann, oder falls eine solche Form eine ***reducirte*** genannt wird, dass sich in jeder Klasse reducirte Formen befinden. Ich will nun kurz die Resultate zusammenstellen, welche die Herren *Weierstrass* und *Kronecker* für einige besonders wichtige Arten der Aequivalenz erhalten haben (*B. M.* 1868 und 1874.).

1) Ist r ein veränderlicher Parameter, der in den Formen A und B nicht vorkommt, so heisst die Gesammtheit der Formen $rA-B$ eine *Formenschaar.* Zwei Schaaren $rA-B$ und $rC-D$ heissen äquivalent, wenn zwei von r unabhängige Substitutionen P, Q (von nicht verschwindender Determinante) so bestimmt werden können, dass

$$P(rA-B)Q = rC-D,$$

oder dass gleichzeitig

$$PAQ = C, \quad PBQ = D$$

ist. Giebt es vier von r unabhängige Formen K, L, M, N von nicht verschwindender Determinante, welche die Gleichung

$$K(rA-B)L = M(rC-D)N$$

befriedigen, so ist die Schaar $rA-B$ der Schaar $rC-D$ äquivalent und geht durch die Substitutionen

$$P = M^{-1}K, \quad Q = LN^{-1}$$

in dieselbe über.

Damit zwei Formenschaaren äquivalent sind, ist nothwendig, dass die Elementartheiler ihrer Determinanten übereinstimmen. Diese Bedingung ist auch hinreichend, falls jene Determinanten nicht identisch verschwinden. Ist aber in der Determinante von $rA-B$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich m, so muss man je $n-m$ unabhängige Lösungen der Gleichungen $(rA-B)X = 0$ und $Y(rA-B) = 0$ ermitteln, deren Coefficienten ganze Functionen möglichst niedrigen Grades von r sind. Wenn dann für zwei Formenschaaren ausser den Elementartheilern noch diese Grade übereinstimmen, so sind sie äquivalent.

Damit eine Formenschaar irreductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die ersten Unterdeterminanten ihrer Determinante für keinen Werth von r sämmtlich verschwinden, und dass ihre Determinante entweder identisch oder nur für einen einzigen Werth von r Null ist.

Wenn zwei Formenschaaren $rA-B$ und $rC-D$ äquivalent sind, und wenn entweder die Formen A, B, C, D alle symmetrisch oder alle alter-

nirend sind, oder wenn A und C symmetrisch, B und D alternirend sind, oder wenn A und B und ebenso C und D conjugirte Formen sind, so können die beiden Schaaren durch *cogrediente* Substitutionen in einander transformirt werden.

2) Zwei Formen A und B heissen *ähnlich*, wenn sie durch *contragrediente* Substitutionen in einander transformirt werden können, wenn also eine Substitution P so bestimmt werden kann, dass

$$P^{-1}AP = B$$

ist. Z. B. sind CD und DC ähnliche Formen, falls die Determinante von C oder D nicht verschwindet, weil

$$C^{-1}(CD)C = DC$$

ist. Da

$$P^{-1}EP = E$$

ist, so ist auch

$$P^{-1}(rE-A)P = rE-B.$$

Damit also A und B ähnlich seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Schaaren $rE-A$ und $rE-B$ äquivalent sind, oder dass die Elementartheiler der charakteristischen Functionen von A und B übereinstimmen. Mithin sind z. B. zwei conjugirte Formen A und A' stets einander ähnlich.

Die Elementartheiler der charakteristischen Function einer zerlegbaren Form sind die Elementartheiler der charakteristischen Functionen der einzelnen Theile zusammengenommen.

Damit eine Form mit contragredienten Variabeln irreductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre charakteristische Determinante nur für einen Werth verschwindet, und dass ihre ersten Unterdeterminanten für denselben nicht sämmtlich Null sind.

Wenn zwei symmetrische oder alternirende Formen ähnlich sind, so können sie durch orthogonale Substitutionen in einander transformirt werden.

Es ist möglich, eine Form A zu bilden, deren charakteristische Function beliebig vorgeschriebene Elementartheiler hat, $\varphi(r)=(r-a)^{\alpha}(r-b)^{\beta}\ldots$, wo a, b, ... endliche Zahlen sind, die nicht verschieden zu sein brauchen, und $\alpha+\beta+\cdots=n$ ist. Eine solche ist z. B.

$$a(x_1y_1+\cdots+x_\alpha y_\alpha)+(x_1y_2+x_2y_3+\cdots+x_{\alpha-1}y_\alpha)$$
$$+b(x_{\alpha+1}y_{\alpha+1}+\cdots+x_{\alpha+\beta}y_{\alpha+\beta})+(x_{\alpha+1}y_{\alpha+2}+\cdots+x_{\alpha+\beta-1}y_{\alpha+\beta})+\cdots.$$

3) Zwei Formen A und B heissen *congruent*, wenn sie durch *cogrediente* Substitutionen in einander transformirt werden können, wenn also eine Substitution P so bestimmt werden kann, dass

$$P'AP = B$$

ist *). Nimmt man auf beiden Seiten dieser Gleichung die conjugirten Formen, so erhält man

$$P'A'P = B'.$$

Daher ist auch

$$P'(rA-A')P = rB-B'.$$

Sind umgekehrt die Formenschaaren $rA-A'$ und $rB-B'$ äquivalent, so sind die Formen A und B congruent. Eine Form A mit cogredienten Variabeln ist stets und nur dann irreductibel, wenn die Determinante von $rA-A'$ 1) identisch oder 2) nur für $r=1$ oder 3) nur für $r=-1$ oder 4) nur für zwei reciproke Werthe, die nicht ± 1 sind, gleich Null ist, und in allen diesen Fällen ihre ersten Unterdeterminanten für keinen Werth von r sämmtlich verschwinden, oder wenn jene Determinante 5) nur für $r=1$ von der Ordnung $4\varkappa$ Null ist, während der grösste gemeinsame Divisor ihrer ersten Unterdeterminanten gleich $(r-1)^{2\varkappa}$ ist, oder 6) nur für $r=-1$ von der Ordnung $4\varkappa+2$ Null ist, während der grösste gemeinsame Divisor ihrer ersten Unterdeterminanten gleich $(r+1)^{2\varkappa+1}$ ist, und wenn in diesen beiden Fällen ihre zweiten Unterdeterminanten für keinen Werth von r sämmtlich verschwinden (*B. M.* 1874, S. 440). Dabei ist zu bemerken, dass die Anzahl der Variabeln in den Fällen 1) und 2) stets ungerade, in den Fällen 3) und 4) aber gerade ist. Damit hängt der für das Folgende wichtige Satz zusammen (*B. M.* 1874, S. 441):

I. *Die Elementartheiler der Determinante der Schaar $uA+vA'$ von der Gestalt $(u+v)^{2\varkappa+1}$ oder $(u-v)^{2\varkappa}$ sind immer doppelt vorhanden.*

Es ist möglich, eine Schaar $rA-A'$ mit conjugirten Grundformen zu bilden, deren Determinante vorgeschriebene Elementartheiler hat, vorausgesetzt, dass dieselben paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derjenigen, die für $r=1$ von einer ungeraden oder für $r=-1$ von einer geraden Ordnung Null sind.

---

*) Beschränkt man sich, wie in der Theorie der algebraischen Gleichungen, auf solche Substitutionen, die Versetzungen sind, oder allgemeiner auf orthogonale Substitutionen, so fällt die Congruenz mit der Aehnlichkeit zusammen.

§. 7. Aehnlichkeit.

Durch wiederholte Anwendung der Identitäten

$$P^{-1}(AB)P=(P^{-1}AP)(P^{-1}BP),\quad P^{-1}(aA+bB)P=aP^{-1}AP+bP^{-1}BP,$$

gelangt man zu dem Satze:

I. *Um eine ganze Function mehrerer Formen durch contragrediente Substitutionen zu transformiren, kann man jede einzelne Form für sich transformiren und dann die ganze Function bilden.*

Sind A und B vertauschbare Formen, so ist

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=P^{-1}(AB)P=P^{-1}(BA)P=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP).$$

II. *Wenn man zwei vertauschbare Formen durch die nämlichen contragredienten Substitutionen transformirt, so erhält man wieder zwei vertauschbare Formen.*

Ist $g(A)$ eine ganze Function von A, so ist nach Satz I.

$$P^{-1}g(A)P = g(P^{-1}AP).$$

Ist $h(A)$ eine ganze Function von A mit nicht verschwindender Determinante, und $f(A)=\frac{g(A)}{h(A)}$, so ist (§. 2, II.)

$$P^{-1}f(A)P=(P^{-1}g(A)P)(P^{-1}(h(A))^{-1}P)=(P^{-1}g(A)P)(P^{-1}h(A)P)^{-1}$$
$$=g(P^{-1}AP)(h(P^{-1}AP))^{-1}=f(P^{-1}AP),$$

also

$$(1.)\qquad P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP).$$

Ist $\psi(A)=0$ eine Gleichung, der A genügt, und ist $B=P^{-1}AP$ eine der Form A ähnliche Form, so ist

$$\psi(B)=P^{-1}\psi(A)P=0.$$

Da auch umgekehrt aus $\psi(B)=0$ wieder $\psi(A)=0$ folgt, so ergiebt sich daraus, dass alle Formen derselben Klasse die nämlichen Gleichungen und speciell dieselbe Gleichung niedrigsten Grades befriedigen. Ist $\psi(r)$ der Quotient der charakteristischen Determinante $\varphi(r)$ der Form A durch den grössten gemeinsamen Divisor ihrer ersten Unterdeterminanten, so ist $\psi(A)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt. Ist A eine elementare Form, so ist nach §. 6, 2

$$\varphi(r)=|rE-A|=(r-a)^n,$$

und die ersten Unterdeterminanten von $\varphi(r)$ verschwinden nicht alle für

$r = a$. Mithin ist $\psi(r) = \varphi(r)$, und es ist

$$(A - aE)^n = 0$$

die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt.

III. ***Damit eine Form mit contragredienten Variabeln irreductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die linke Seite der Gleichung niedrigsten Grades, der sie genügt, die n^{te} Potenz einer linearen Function ist.***

Ist daher $k > 1$, so verschwinden nach §. 3, VI. in der Determinante der Form $(A - aE)^k$ die ersten Unterdeterminanten, und daher ist diese Form keine elementare.

Ist $n = 1$, so ist jede Form A und folglich auch jede rationale Function $f(A)$ eine elementare Form. Sei nun $n > 1$ und sei $f(A)$ eine rationale Function der irreductibeln Form A, also $f(r)$ eine rationale Function von r, deren Nenner für $r = a$ nicht verschwindet (§. 3.). Dann ist (§. 3, II.) die charakteristische Function der Form $f(A)$

$$|rE - f(A)| = (r - f(a))^n.$$

Sei ferner

$$f(r) - f(a) = (r - a)^k g(r),$$

wo die rationale Function $g(r)$ für $r = a$ weder Null noch unendlich wird. Die Zahl k ist grösser als Eins oder gleich Eins, je nachdem $f'(a)$ verschwindet, oder nicht. Dann ist

$$f(A) - f(a)E = (A - aE)^k g(A),$$

wo die Determinante von $g(A)$ gleich $(g(a))^n$, also von Null verschieden ist. Daher ist (§. 1, V.) in der Determinante der Form $f(A) - f(a)E$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ebenso gross, wie in der Determinante von $(A - aE)^k$. In der charakteristischen Function von $f(A)$ verschwinden folglich für $r = f(a)$ die ersten Unterdeterminanten alle oder nicht alle, je nachdem $k > 1$ oder $k = 1$ ist. Im ersten Falle ist also $f(A)$ reductibel, im andern irreductibel.

IV. ***Damit eine rationale Function $f(A)$ einer elementaren Form A irreductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass entweder $n = 1$ ist, oder wenn $n > 1$ ist, $f'(r)$ für die Wurzel der charakteristischen Gleichung von A nicht verschwindet.***

Ist jetzt A eine beliebige Form, so ist sie einer reducirten ähnlich, oder es kann eine Substitution P so bestimmt werden, dass

$$P^{-1}AP = \Sigma A_\varrho$$

ist, wo A_1, A_2, ... elementare Formen sind, von denen nicht zwei ein Variabelnpaar gemeinsam haben. Ist $f(A)$ eine rationale Function von A, so ist folglich nach §. 5, (1.)

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = f(\Sigma A_\varrho) = \Sigma f(A_\varrho).$$

Die Formen $f(A_1)$, $f(A_2)$, ... sind stets und nur dann elementar, wenn $f'(r)$ für keinen Werth Null ist, für den ein mehrfacher Elementartheiler der charakteristischen Function $\varphi(r)$ von A verschwindet. In diesem Falle ist also $\Sigma f(A_\varrho)$ eine reducirte Form von $f(A)$. Aus der Beziehung zwischen den elementaren Formen, in welche die reducirte einer gegebenen Form zerlegbar ist, und den Elementartheilern, in welche die charakteristische Function derselben zerfällt, ergiebt sich daher der Satz:

V. *Sind* $(r-a)^\alpha$, $(r-b)^\beta$, ... *die Elementartheiler der charakteristischen Function von* A, *ist* $f(A)$ *eine rationale Function von* A, *und ist* $f'(r)$ *für keinen Werth Null, für welchen ein mehrfacher Elementartheiler verschwindet, so sind* $(r-f(a))^\alpha$, $(r-f(b))^\beta$, ... *die Elementartheiler der charakteristischen Function von* $f(A)$.

Ist speciell die Determinante von A nicht Null, so sind $(r-a^k)^\alpha$, $(r-b^k)^\beta$, ... die Elementartheiler der charakteristischen Function von A^k, und

$$\left(r-\frac{1}{a}\right)^\alpha, \quad \left(r-\frac{1}{b}\right)^\beta, \quad \dots$$

die Elementartheiler derjenigen von A^{-1}. Das letztere folgt auch daraus, dass wegen der Gleichung

$$rE-A = -A(E-rA^{-1})$$

die Formenschaaren $rE-A$ und $E-rA^{-1}$ äquivalent sind.

Sei a eine Wurzel der charakteristischen Gleichung $\varphi(r)=0$ der Form A, sei in der Determinante von $aE-A$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich $n-k$, und sei $l_\varkappa (\varkappa = 0, 1, \dots k-1)$ der Exponent der höchsten Potenz von $r-a$, die in allen Unterdeterminanten $(n-\varkappa)^{\text{ten}}$ Grades von $\varphi(r)$ enthalten ist. Dann ist (*Weierstrass, B. M.* 1868, S. 311 und 330)

$$l > l_1 > l_2 > \dots > l_{k-1} > 0,$$

und es sind

$$(r-a)^{l-l_1}(r-a)^{l_1-l_2}\dots(r-a)^{l_{k-1}}$$

diejenigen Elementartheiler von $\varphi(r)$, die für $r=a$ verschwinden. Ferner ist

$$l-l_1 \geqq l_1-l_2 \geqq \dots \geqq l_{k-1}.$$

Sind daher $(r-a)^{\alpha}$, $(r-a)^{\alpha_1}$, ... die Elementartheiler von $\varphi(r)$, die für $r=a$ verschwinden, in irgend einer Reihenfolge, und ist α die grösste der Zahlen α, α_1, ..., so ist $\alpha = l - l_1$. Sei b eine von a verschiedene Wurzel der Gleichung $\varphi(r)=0$, und $(r-b)^{\beta}$ der Elementartheiler höchsten Grades, der für $r=b$ verschwindet u. s. w. Dann ist $\psi(r) = (r-a)^{\alpha}(r-b)^{\beta}\ldots$ der Quotient der Determinante $\varphi(r)$ durch den grössten gemeinsamen Divisor ihrer ersten Unterdeterminanten, und folglich ist $\psi(A)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt.

VI. *Bestimmt man für jede der verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer Form A den Elementartheiler höchsten Grades, der für dieselbe verschwindet, und bezeichnet man das Product dieser Elementartheiler mit* $\psi(r)$, *so ist* $\psi(A)=0$ *die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt.*

Beiläufig folgt daraus:

VII. *Ist* $f(A)=0$ *eine Gleichung, der A genügt, und* $f(r)=0$ *eine Gleichung ohne mehrfache Wurzeln, so hat die charakteristische Function von A lauter einfache Elementartheiler.*

Denn da $f(r)$ durch $\psi(r)$ theilbar ist, so kann auch die Gleichung $\psi(r)=0$ keine mehrfachen Wurzeln haben. Die Zahlen α, β, ... sind also alle gleich Eins, und daher sind die Exponenten aller Elementartheiler von $\varphi(r)$ gleich Eins. Sei z. B. R eine orthogonale Form (§. 12.), also $RR'=E$. Ist R zugleich symmetrisch, so ist $R'=R$ und daher $R^2=E$. Daher sind die Elementartheiler von R alle einfach und verschwinden für $r=\pm 1$. Ist dagegen R zugleich alternirend, so ist $R'=-E$ und daher $R^2=-E$. Daher sind die Elementartheiler von R alle einfach und verschwinden für $r=\pm i$. Da

$$|rE-R| = |rE-R'| = |rE+R| = (-1)^n|-rE-R|$$

ist, so verschwinden ebenso viele Elementartheiler für $r=i$, wie für $r=-i$.

VIII. *Ist eine Form zugleich orthogonal und symmetrisch, so sind die Elementartheiler ihrer charakteristischen Function alle einfach, und verschwinden für die Werthe* 1 *und* -1.

IX. *Ist eine Form zugleich orthogonal und alternirend, so sind die Elementartheiler ihrer charakteristischen Function alle einfach, und verschwinden zur Hälfte für den Werth i, zur Hälfte für* $-i$.

Sei $\psi(A)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der eine Form A genügt, und $f(A)$ eine rationale Function von A. Nach den Sätzen V. und VI. ist dann die Gleichung niedrigsten Grades, der $f(A)$ genügt, stets und

nur dann von einem niedrigeren Grade als $\psi(A)$, wenn für einen Werth, für den ein mehrfacher Elementartheiler von $\varphi(r)$ verschwindet, d. h. für eine mehrfache Wurzel der Gleichung $\psi(r)=0$, die Ableitung $f'(r)$ von Null verschieden ist, und wenn $f(r)$ nicht für zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $\varphi(r)=0$ (oder $\psi(r)=0$) gleiche Werthe hat. Damit ist der bereits in §. 3. ausgesprochene Satz V. bewiesen.

Die Bedingungen, unter denen zwei Formen A und B ähnlich sind, unter denen also die Gleichung $P^{-1}AP=B$ möglich ist, sind in §. 6, 2. auseinandergesetzt worden. Ich knüpfe daran noch einige Bemerkungen über die Möglichkeit der Gleichung $AP=PB$, falls die Determinante von P verschwindet. Damit zwei bilineare Formen durch zwei Substitutionen in einander transformirt werden können, die weiter keiner Beschränkung unterliegen, als dass ihre Determinanten nicht verschwinden, ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass in den Determinanten der beiden Formen der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten derselbe ist. Ist also m dieser Grad in der Determinante von P, und setzt man

$$E_1=\Sigma x_\mu y_\mu,\quad E_2=\Sigma x_\nu y_\nu\quad (\mu=1,\dots m;\ \nu=m+1,\dots n),$$

so können die Substitutionen U, V von nicht verschwindender Determinante so bestimmt werden, dass

$$UPV = E_1$$

ist. Nun folgt aber aus $AP=PB$ die Gleichung

$$(UAU^{-1})(UPV)=(UPV)(V^{-1}BV),$$

oder wenn man

$$UAU^{-1}=A_0,\quad V^{-1}BV=B_0$$

setzt,

$$A_0E_1 = E_1B_0.$$

Da $E_1E_2=E_2E_1=0$ und $E_1^2=E_1$ ist, so ergiebt sich daraus

$$E_1A_0E_1=E_1B_0E_1,\quad E_2A_0E_1=0,\quad E_1B_0E_2=0,$$

oder wenn man

$$E_\varrho A_0E_\sigma=A_{\varrho\sigma},\quad E_\varrho B_0E_\sigma=B_{\varrho\sigma}$$

setzt,

$$A_{11}=B_{11},\quad A_{21}=0,\quad B_{12}=0.$$

Offenbar bedeutet A_{11} den Theil von A_0, welcher nur die Variabeln x_μ, y_μ $(\mu=1,\dots m)$ enthält, A_{12} den, welcher nur x_μ, y_ν $(\nu=m+1,\dots n)$

enthält u. s. w. Nun zerfällt eine Determinante, in der alle Elemente verschwinden, welche m Colonnen mit $n-m$ Zeilen gemeinsam haben, in das Product einer Determinante m^{ten} und einer $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades. Da $A_{21}=0$ ist, so ist folglich

$$|rE-A_0| = |rE_1-A_{11}||rE_2-A_{22}|,$$

also weil A und A_0 ähnlich sind, auch

$$|rE-A| = |rE_1-A_{11}||rE_2-A_{22}|,$$
$$|rE-B| = |rE_1-B_{11}||rE_2-B_{22}|.$$

Da $A_{11}=B_{11}$ ist, so haben folglich die charakteristischen Functionen der Formen A und B einen gemeinsamen Theiler m^{ten} Grades.

X. *Ist $AP=PB$, so kann in der Determinante von P der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten nicht grösser sein, als der Grad des grössten gemeinsamen Theilers der charakteristischen Functionen von A und B.*

XI. *Sind die charakteristischen Functionen von A und B theilerfremd, und ist $AP=PB$, so ist P gleich Null.*

Auf die Bestimmung der Substitutionen, welche eine Form mit contragredienten Variabeln in sich selbst transformiren, oder was auf dasselbe hinauskommt, auf die Ermittelung der Formen, welche mit einer gegebenen vertauschbar sind, gehe ich hier nicht näher ein. Von den Ergebnissen, die ich darüber erhalten habe, führe ich nur die folgenden an:

XII. *Sind die Formen A und B vertauschbar, so können die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichungen einander so zugeordnet werden, dass jede Wurzel der charakteristischen Gleichung von AB das Product von zwei entsprechenden Wurzeln jener Gleichungen ist.*

XIII. *Wenn die ersten Unterdeterminanten der charakteristischen Determinante einer Form keinen Theiler gemeinsam haben, so sind die ganzen Functionen der Form die einzigen Formen, mit denen sie vertauschbar ist.*

XIV. *Ist $\psi(A)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt, sind die Wurzeln $r_1, \dots r_p$ der Gleichung $\psi(r)=0$ alle von einander verschieden, ist $\dfrac{\psi(r)}{r-r_\lambda}=\psi_\lambda(r)$, und sind C_λ $(\lambda=1, \dots p)$ willkürliche Formen, so stellt der Ausdruck*

$$\Sigma\psi_\lambda(A)\,C_\lambda\,\psi_\lambda(A)$$

alle Formen dar, welche mit A vertauschbar sind.

XV. *Ist in der charakteristischen Determinante einer Form der grösste gemeinsame Theiler der Unterdeterminanten $(n-\varkappa)^{ten}$ Grades vom Grade $n_\varkappa$, so ist*

$$n+2(n_1+n_2+\cdots)$$

die Anzahl der linear unabhängigen Formen, die mit der Form vertauschbar sind.

Für die Form E ist z. B. $n_\varkappa = n-\varkappa$, und daher ist die obige Anzahl gleich

$$n+2((n-1)+(n-2)+\cdots+1) = n^2.$$

§. 8. Transformation der bilinearen Formen in sich selbst.

Sei A eine beliebige Form, und seien P, Q zwei Substitutionen, welche A in sich selbst transformiren, d. h. zwei Formen von nicht verschwindender Determinante, die der Gleichung

$$(1.)\qquad PAQ = A$$

genügen. Transformiren auch P_1 und Q_1 die Form A in sich selbst, so ist

$$(P_1P)A(QQ_1) = P_1(PAQ)Q_1 = P_1AQ_1 = A,$$

und mithin sind auch P_1P, QQ_1 zwei Substitutionen derselben Art. Daher transformiren auch P^ν, Q^ν die Form A in sich selbst, auch wenn ν eine negative Zahl ist, da

$$P^{-1}AQ^{-1} = P^{-1}(PAQ)Q^{-1} = A$$

ist. Aus der Gleichung $P^\nu AQ^\nu = A$ folgt

$$P^\nu A = AQ^{-\nu},\quad (\Sigma a_\nu P^\nu)A = A(\Sigma a_\nu Q^{-\nu}),$$

also, wenn $g(r)$ eine ganze Function von r ist,

$$g(P)A = Ag(Q^{-1}).$$

Ist $h(r)$ eine andere ganze Function, so ist ebenso

$$h(P)A = Ah(Q^{-1}).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$h(P)g(P)A = h(P)Ag(Q^{-1}),$$
$$g(P)h(P)A = g(P)Ah(Q^{-1}),$$

also, weil $g(P)$ mit $h(P)$ vertauschbar ist,

$$g(P)Ah(Q^{-1}) = h(P)Ag(Q^{-1}),$$

und daher, wenn die Determinanten von $h(P)$ und $h(Q^{-1})$ von Null verschieden sind,

$$(h(P))^{-1}g(P)A = Ag(Q^{-1})(h(Q^{-1}))^{-1},$$

oder wenn man $\frac{g(r)}{h(r)} = f(r)$ setzt,

$$f(P)A = Af(Q^{-1}), \quad f(P)A(f(Q^{-1}))^{-1} = A.$$

Sind also die Determinanten von $f(P)$ und $f(Q^{-1})$ von Null verschieden, so folgt aus dieser Gleichung der Satz:

I. ***Wenn die Form A durch die Substitutionen P, Q in sich selbst übergeht, so wird sie auch durch die Substitutionen $f(P)$, $(f(Q^{-1}))^{-1}$ in sich selbst transformirt.***

Ist also $g(P^{-1})$ irgend eine rationale Function von P, so ist

$$f(P)A = Af(Q^{-1}), \quad Ag(Q) = g(P^{-1})A$$

und daher

$$(2.) \qquad f(P)Ag(Q) = Af(Q^{-1})g(Q) = f(P)g(P^{-1})A.$$

(Vgl. ***Rosanes***, dieses Journal Bd. 80, S. 70.)

Da $f(P)$ mit P vertauschbar ist, so folgt aus (1.)

$$P(f(P)Ag(Q))Q = f(P)(PAQ)g(Q) = f(P)Ag(Q).$$

II. ***Ist A eine Form, welche durch die Substitutionen P, Q in sich selbst transformirt wird, so ist auch $f(P)Ag(Q)$ eine solche Form.***

Sind U und V zwei Formen von nicht verschwindender Determinante, so folgt aus (1.)

$$(UPU^{-1})(UAV)(V^{-1}QV) = (UAV),$$

oder wenn man

$$UAV = A_1, \quad UPU^{-1} = P_1, \quad V^{-1}QV = Q_1$$

setzt,

$$P_1A_1Q_1 = A_1.$$

III. ***Wenn eine Form durch zwei Substitutionen in sich selbst übergeht, so wird jede äquivalente Form durch zwei ähnliche Substitutionen in sich selbst transformirt.***

Ich gehe nun dazu über, die gegenseitigen Beziehungen zweier Substitutionen zu ermitteln, welche geeignet sind eine Form A in sich selbst zu transformiren, und nehme dabei zunächst an, dass die Determinante von A nicht Null ist. Dann folgt aus (1.)

$$P = AQ^{-1}A^{-1}.$$

IV. *Damit zwei Substitutionen geeignet seien, eine Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die eine der reciproken der anderen ähnlich ist.*

Ferner folgt aus (1.)

$$(rE-P)AQ = rAQ - PAQ = rAQ - A = A(rQ-E).$$

Die Formenschaaren $rE-P$ und $rQ-E$ sind also äquivalent. Sind umgekehrt diese Schaaren äquivalent, so lassen sich zwei Formen A und B von nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$A(rQ-E)B = rE-P$$

oder

$$AB = P, \quad AQB = E$$

ist. Daraus folgt

$$(PAQ)B = P(AQB) = P = (A)B,$$

also weil die Determinante von B nicht Null ist,

$$PAQ = A.$$

V. *Damit die Substitutionen P, Q geeignet seien, eine Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Formenschaaren $rE-P$ und $rQ-E$ äquivalent sind.*

Ist also die charakteristische Function von P, in Elementartheiler zerlegt, gleich

$$|rE-P| = (r-a)^{\alpha}(r-b)^{\beta}\ldots,$$

so ist

$$|rQ-E| = |Q|(r-a)^{\alpha}(r-b)^{\beta}\ldots,$$

oder wenn man r durch $\frac{1}{r}$ ersetzt und mit $(-r)^{n}$ multiplicirt,

$$|rE-Q| = \left(r-\frac{1}{a}\right)^{\alpha}\left(r-\frac{1}{b}\right)^{\beta}\cdots.$$

VI. *Damit zwei Substitutionen geeignet seien, eine Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Functionen einander so zugeordnet werden können, dass die entsprechenden von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden.*

Ich betrachte nun Substitutionen P, Q, welche eine Form A in sich selbst transformiren, in deren Determinante der höchste Grad nicht ver-

schwindender Unterdeterminanten gleich m ist. Setzt man

$$E_1 = \Sigma x_\mu y_\mu, \quad E_2 = \Sigma x_\nu y_\nu, \qquad (\mu = 1, \dots m;\ \nu = m+1, \dots n)$$

so ist

$$E_1 + E_2 = E, \quad E_\varrho^2 = E_\varrho, \quad E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0.$$

Da A und E_1 äquivalent sind, so giebt es nach Satz III. zwei den Substitutionen P, Q ähnliche Substitutionen P_0, Q_0, welche E_1 in sich selbst transformiren. Aus der Gleichung

$$P_0 E_1 Q_0 = E_1$$

und den eben erwähnten Relationen folgt aber

$$(E_1 P_0 E_1)(E_1 Q_0 E_1) = E_1, \quad (E_\varrho P_0 E_1)(E_1 Q_0 E_\sigma) = 0,$$

falls ϱ und σ nicht beide gleich Eins sind. Setzt man (Vgl. §. 7, X.)

$$E_\varrho P_0 E_\sigma = P_{\varrho\sigma}, \quad E_\varrho Q_0 E_\sigma = Q_{\varrho\sigma},$$

so ist also

$$P_{11} Q_{11} = E_1, \quad P_{\varrho 1} Q_{1\sigma} = 0.$$

Da folglich das Product aus den Determinanten der Formen P_{11} und Q_{11} der Variabeln x_μ, y_μ $(\mu = 1, \dots m)$ gleich Eins ist, so verschwindet keine dieser beiden Determinanten. Daher folgt aus der Gleichung $P_{11} Q_{12} = 0$, dass $Q_{12} = 0$ ist, und aus $P_{21} Q_{11} = 0$, dass $P_{21} = 0$ ist.*) Mithin ist

$$|rE - P| = |rE - P_0| = |rE_1 - P_{11}| \cdot |rE_2 - P_{22}|,$$
$$|rE - Q| = |rE - Q_0| = |rE_1 - Q_{11}| \cdot |rE_2 - Q_{22}|.$$

Da P_{11} und Q_{11} reciproke Formen der Variabeln x_μ, y_μ sind, so folgt daraus (§. 3, III.):

VII. *Damit zwei Substitutionen geeignet seien, eine Form in sich selbst zu transformiren, in deren Determinante der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich m ist, müssen ihre charakteristischen Gleichungen m reciproke Wurzeln haben.*

VIII. *Wird eine Form durch zwei Substitutionen in sich selbst transformirt, so kann in ihrer Determinante der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten nicht grösser sein, als die Anzahl der reciproken Wurzeln, welche die charakteristischen Gleichungen der beiden Substitutionen haben.*

---

*) Denn die Gleichung $P_{11} Q_{12} = 0$ repräsentirt das Gleichungssystem

$$p_{\mu 1} q_{1\nu} + \dots + p_{\mu m} q_{m\nu} = 0.$$

Setzt man $\mu = 1, \dots m$, so folgt aus diesen m Gleichungen von nicht verschwindender Determinante, dass

$$q_{1\nu}, \dots q_{m\nu}$$

verschwinden (Vgl. §. 2, I.).

IX. *Wird eine Form durch zwei Substitutionen in sich selbst transformirt, deren charakteristische Gleichungen keine reciproken Wurzeln haben, so muss sie identisch verschwinden.*

Diese Sätze gelten auch für den Fall, dass in der Form A die Anzahl der Variabeln x_α derjenigen der Variabeln y_β nicht gleich ist, und setzen überhaupt keinerlei Entsprechen zwischen den mit demselben Index bezeichneten Variabeln x_α, y_α voraus.

§. 9. Transformation der bilinearen Formen mit cogredienten Variabeln in sich selbst.

Sei A eine Form mit cogredienten Variabeln, P eine Substitution von nicht verschwindender Determinante, welche sie in sich selbst transformirt, also

$$(1.)\qquad P'AP = A.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die conjugirten Formen, so erhält man

$$(2.)\qquad P'A'P = A'.$$

Aus den in §. 8 entwickelten Sätzen ergiebt sich für diesen Fall: Ist A eine Form, welche durch die Substitution P in sich selbst transformirt wird, so ist auch

$$f(P')Ag(P)+f_1(P')A'g_1(P)$$

eine solche Form, wo $f(r)$, $g(r)$, ... rationale Functionen sind. Wenn mehrere Substitutionen eine Form in sich selbst transformiren, so muss auch jede aus ihnen zusammengesetzte Substitution die Form in sich selbst transformiren. Da z. B. $(-E)A(-E) = A$ ist, so muss, wenn P der Gleichung (1.) genügt, auch $-P$ dieselbe befriedigen.

Ist ferner $g(r)$ eine rationale Function, so ist (§. 8, I.)

$$g(P')A(g(P^{-1}))^{-1} = A.$$

Ist nun

$$g(r) = r^k\frac{f(r)}{f(r^{-1})},$$

so ist

$$(g(P^{-1}))^{-1} = g(P).$$

Da $g(P')$ die conjugirte Form von $g(P)$ ist, so folgt daraus:

I. *Ist P eine Substitution, welche die Form A in sich selbst transformirt, so ist auch*

$$P^k\frac{f(P)}{f(P^{-1})}$$

eine solche Substitution.

Ist G eine Form von nicht verschwindender Determinante, so folgt aus (1.) die Gleichung

$$(G'P'G'^{-1})(G'AG)(G^{-1}PG) = G'AG.$$

Setzt man

$$G'AG = A_0,$$
$$G^{-1}PG = P_0,$$

so ist (§. 1, IV.)

$$G'P'G'^{-1} = P'_0,$$

und daher

$$P'_0 A_0 P_0 = A_0.$$

II. ***Wenn eine Substitution eine Form in sich selbst transformirt, so transformirt jede ähnliche Substitution eine congruente Form in sich selbst.***

Ist die Determinante von A nicht Null, so verschwindet auch die von A_0 nicht. Ist A symmetrisch oder alternirend, so ist es auch A_0.

Ist die Determinante von A nicht Null, so folgt aus der Gleichung (1.)

$$P' = AP^{-1}A^{-1}, \quad (rE-P')AP = A(rP-E).$$

Die Form P' ist also der Form P^{-1} ähnlich, oder die Formenschaaren $rE-P'$ und $rP-E$ sind äquivalent. Nun sind aber (§. 6) P' und P ähnlich, weil die Elementartheiler ihrer charakteristischen Functionen übereinstimmen. Daraus ergiebt sich (Vgl. §. 8, Satz IV., V., VI.):

III. ***Damit eine Substitution P geeignet sei, eine Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend,***

dass sie der reciproken Substitution ähnlich ist,

oder

dass die Formenschaaren $rE-P$ und $rP-E$ äquivalent sind,

oder

dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Function paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derer, welche für den Werth 1 oder −1 Null sind,

oder

dass ihre charakteristische Determinante und die grössten gemeinsamen Divisoren der Unterdeterminanten gleichen Grades derselben reciproke Functionen sind.

Ist die Determinante von A nicht Null, so folgt aus (1.), dass das Quadrat der Determinante von P gleich Eins ist. Je nachdem diese Determinante, die ich mit ε bezeichne, den Werth $+1$ oder -1 hat, heisst die Transformation eine *eigentliche* oder eine *uneigentliche*. Das Product aller n Wurzeln der Gleichung $|rE-P|=0$ ist gleich ε. Jeder von ± 1 verschiedenen Wurzel a entspricht eine Wurzel $\frac{1}{a}$ und das Product von zwei solchen reciproken Wurzeln ist gleich $+1$. Sind also p Wurzeln dieser Gleichung gleich $+1$ und q gleich -1, so ist das Product aller Wurzeln

$$(3.)\qquad (-1)^q = \varepsilon,$$

und weil $n-p-q$ gleich der Anzahl der Paare reciproker Wurzeln, also gerade ist, so ist auch

$$(4.)\qquad (-1)^{n-p} = \varepsilon.$$

Ist $\varepsilon=-1$, so ist daher q ungerade, also wenigstens Eins. Ist $\varepsilon=-1$ und n gerade, so ist p ungerade.

IV. *Ist P eine Substitution, welche eine Form von nicht verschwindender Determinante uneigentlich in sich selbst transformirt, so ist die Determinante von $E+P$, und falls n gerade ist, auch die von $E-P$ gleich Null.*

Ist n ungerade, so ist, falls $\varepsilon=1$ ist, p ungerade, und falls $\varepsilon=-1$ ist, q ungerade. Daher ist ε eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von P, oder die Determinante von $E-\varepsilon P$ ist gleich Null.

Aus §. 8, Satz VII. ergiebt sich ferner (Vgl. *Rosanes*, dieses Journal Bd. 80, S. 64):

V. *Damit eine Substitution geeignet sei, eine Form in sich selbst zu transformiren, in deren Determinante der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich m ist, muss ihre charakteristische Function durch eine reciproke Function m^{ten} Grades theilbar sein.*

Daran knüpfe ich noch die folgende Bemerkung, von der ich später Gebrauch machen werde. Sei A irgend eine Form, und P eine Substitution, welche sie in sich selbst transformirt, und welche in die beiden Theile P_1 und P_2 zerlegbar ist, deren erster nur die Variabeln x_μ, y_μ $(\mu=1, \dots m)$ und deren anderer nur x_ν, y_ν $(\nu=m+1, \dots n)$ enthält. Setzt man

$$E_1 = \Sigma x_\mu y_\mu, \quad E_2 = \Sigma x_\nu y_\nu,$$

so ist dann

$$P_\varrho = E_\varrho P = PE_\varrho = E_\varrho PE_\varrho = E_\varrho P_\varrho = P_\varrho E_\varrho.$$

Aus der Gleichung (1.) folgt daher

$$E_\varrho A E_\sigma = E_\varrho (P' A P) E_\sigma = (E_\varrho P') A (P E_\sigma) = (P'_\varrho E_\varrho) A (E_\sigma P_\sigma),$$

oder wenn man $E_\varrho A E_\sigma = A_{\varrho\sigma}$ setzt,

$$P'_\varrho A_{\varrho\sigma} P_\sigma = A_{\varrho\sigma}.$$

Ich mache nun die weitere Annahme, dass keine Wurzel der charakteristischen Gleichung von P_1 einer Wurzel derjenigen von P_2 reciprok ist. Da P_1 und P'_1, P_2 und P'_2 die nämliche charakteristische Function haben, so folgt aus $P'_1 A_{12} P_2 = 0$ nach §. 8, Satz IX., dass $A_{12} = 0$ ist, und aus $P'_2 A_{21} P_1 = 0$, dass $A_{21} = 0$ ist. Mithin ist die Form A in $A_{11} + A_{22}$ zerlegbar.

VI. *Wird eine Form durch eine zerlegbare Substitution in sich selbst transformirt, und haben die charakteristischen Functionen der beiden Theile dieser Substitution keine reciproken Wurzeln, so ist die Form in der nämlichen Weise zerlegbar, wie die Substitution.*

Wenn die Determinante von A nicht verschwindet, und man auf beiden Seiten der Gleichung (1.) die reciproken Formen nimmt, so erhält man $P^{-1} A^{-1} P'^{-1} = A^{-1}$, also nach Gleichung (2.) $(P^{-1} A^{-1} P'^{-1})(P' A' P) = A^{-1} A'$, oder wenn man

$$(5.) \qquad U = A^{-1} A'$$

setzt,*)

$$P^{-1} U P = U, \quad U P = P U.$$

VII. *Damit eine Substitution geeignet sei, eine Form A von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, muss sie mit $A^{-1}A'$ vertauschbar sein.*

U selbst ist eine Substitution, welche A in sich selbst transformirt.**) Denn es ist

$$U = A^{-1} A', \qquad U' = A A'^{-1},$$

$$U' A U = A (A'^{-1} (A A^{-1}) A') = A.$$

VIII. *Eine Form A von nicht verschwindender Determinante wird durch die Substitution $A^{-1}A'$ eigentlich in sich selbst transformirt.*

*) Eine Substitution von der Gestalt $\pm A^{-1}A'$ nennt Herr *Rosanes* (dieses Journal Bd. 80, S. 61) *antisymmetrisch.* Da $-U$ aus U und $-E$ zusammengesetzt ist, so ist diese Substitution im folgenden nicht besonders betrachtet worden.

**) Allgemeiner sind, wenn die Determinanten der Formen A und B nicht verschwinden,

$$P = A B^{-1}, \qquad Q = A^{-1} B,$$

zwei Substitutionen, welche die Formenschaar $A - rB$ in sich selbst transformiren.

§. 10. Transformation der symmetrischen und der alternirenden Formen in sich selbst.

Sei A eine Form von nicht verschwindender Determinante, und sei

$$A+A'=2S,\quad A-A'=2T,$$
$$S+T=A,\qquad S-T=A'.$$

Setzt man ferner

$$(1.)\qquad U=A^{-1}A'=(S+T)^{-1}(S-T),$$

so ist

$$A(E+U)=2S,\quad A(E-U)=2T,$$

oder

$$(2.)\qquad (S+T)(E+U)=2S,\quad (S+T)(E-U)=2T.$$

Nach §. 9, Satz VIII. ist nun

$$U'A\,U=A,\quad U'A'\,U=A'.$$

Daraus ergiebt sich durch Addition und Subtraction:

$$(3.)\qquad U'S\,U=S,\quad U'\,T\,U=T.$$

I. ***Ist S eine gegebene symmetrische Form und T eine beliebige alternirende Form, für welche die Determinante von $S+T$ nicht Null ist, so ist***

$$U\;=\;(S+T)^{-1}(S-T)$$

eine Substitution, welche die Form S eigentlich in sich selbst transformirt, und wenn die Determinante von S nicht verschwindet, so ist auch die von $E+U$ nicht Null.

II. ***Ist T eine gegebene alternirende Form und S eine beliebige symmetrische Form, für welche die Determinante von $S+T$ nicht Null ist, so ist***

$$U\;=\;(S+T)^{-1}(S-T)$$

eine Substitution, welche die Form T eigentlich in sich selbst transformirt, und wenn die Determinante von T nicht verschwindet, so ist auch die von $E-U$ nicht Null.

Diese beiden Sätze lassen sich umkehren. *)

III. ***Jede Substitution U, welche eine symmetrische Form S von nicht verschwindender Determinante in sich selbst transformirt, und für welche die***

---

*) Die Sätze I. und III. sind von Herrn *Hermite* entdeckt, dieses Journal, Bd. 47, S. 309. Vgl. auch *Cayley*, dieses Journal, Bd. 50, S. 288 und *Rosanes*, dieses Journal, Bd. 80, S. 66. Betreffs des Satzes II. vgl. *Kronecker*, dieses Journal, Bd. 68, S. 282.

Determinante von $E+U$ nicht Null ist, lässt sich, und zwar nur in einer Weise, auf die Gestalt

$$U = (S+T)^{-1}(S-T)$$

bringen, wo

$$(4.) \qquad T = S\frac{E-U}{E+U}$$

eine (endliche) alternirende Form ist.

IV. *Jede Substitution U, welche eine alternirende Form T von nicht verschwindender Determinante in sich selbst transformirt, und für welche die Determinante von $E-U$ nicht Null ist, lässt sich, und zwar nur in einer Weise, auf die Gestalt*

$$U = (S+T)^{-1}(S-T)$$

bringen, wo

$$(5.) \qquad S = T\frac{E+U}{E-U}$$

eine (endliche) symmetrische Form ist. *)

Seien vorläufig S und T beliebige Formen, die nicht symmetrisch oder alternirend zu sein brauchen, sei die Determinante von $S+T$ nicht Null, und sei U durch die Gleichung (1.) definirt. Daraus ergeben sich die Gleichungen (2.), und folglich kann, wenn die Determinante von S $[T]$ nicht verschwindet, auch die von $E+U$ $[E-U]$ nicht Null sein. Ferner folgt aus (1.)

$$(S+T)U = S-T, \quad SU+TU = S-T, \quad T+TU = S-SU,$$
$$(6.) \qquad T(E+U) = S(E-U).$$

Daraus ergiebt sich, wenn die Determinante von S $[T]$, also auch die von $E+U$ $[E-U]$ nicht verschwindet, die Gleichung (4.) [(5.)].

Ich behaupte nun, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (4.) stets eine alternirende Form ist, wenn S eine symmetrische Form und U eine Substitution ist, welche S in sich selbst transformirt, wenn also

$$U'SU = S$$

*) Das Wort *eigentlich*, das in den Sätzen I. und II. vorkommt, fehlt in III. und IV. Vgl. §. 9, Satz IV. Eine alternirende Form von nicht verschwindender Determinante lässt nur eigentliche Substitutionen in sich selbst zu, weil die Quadratwurzel aus der Determinante der Form eine rationale schiefe Invariante derselben ist.

ist. Denn jener Ausdruck hat nur eine Bedeutung, wenn die Determinante von $E+U$ nicht verschwindet. Dann sind aber die Formen T und

$$T_0 = (E+U')T(E+U)$$

congruent. Nun ergiebt sich aber aus (4.) die Gleichung (6.) und daraus

$$T_0 = (E+U')S(E-U) = S+U'S-SU-U'SU = U'S-SU.$$

Die conjugirte Form des letzten Ausdrucks ist $SU-U'S$. Folglich ist T_0 alternirend, und mithin ist es auch die congruente Form T.

In derselben Weise ergiebt sich der Beweis des Satzes IV. aus den Gleichungen

$$S_0 = (E-U')S(E-U) = (E-U')T(E+U) = TU-U'T.$$

Bevor ich die Gleichungen (1.), (4.) und (5.) genauer discutire, will ich sie dazu benutzen, den Charakter der Substitutionen zu ermitteln, welche geeignet sind, symmetrische [alternirende] Formen von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren. Wenn die Substitution P den Bedingungen des Satzes III., §. 9 genügt, so giebt es eine Form A von nicht verschwindender Determinante, welche die Gleichung

$$P'AP = A$$

befriedigt, also auch die Gleichungen

$$P'A'P = A', \quad P'(A+A')P = A+A', \quad P'(A-A')P = A-A'.$$

Unter der gemachten Voraussetzung giebt es also auch eine symmetrische und eine alternirende Form, welche durch die Substitution P in sich selbst übergehen. Es kann aber die Determinante derselben verschwinden, es kann sogar eine der beiden Formen Null sein. Es fragt sich also, welches der Charakter einer Substitution ist, die eine symmetrische oder alternirende Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst transformirt. (Vgl. *Rosanes*, dieses Journal, Bd. 80, S. 62.)

Ich mache zunächst die specielle Annahme, dass die charakteristische Function von P nur für einen Werth $r=\varepsilon$ verschwindet, dessen Quadrat gleich Eins ist. Die Determinante der Form $\varepsilon E+P$ ist demnach von Null verschieden. Ist nun S [T] eine symmetrische [alternirende] Form von nicht verschwindender Determinante, welche durch die Substitution P in sich selbst transformirt wird, so ist $U=\varepsilon P$ [$-\varepsilon P$] eine Substitution, welche S [T] in sich selbst verwandelt, und für welche die Determinante von $E+U$ [$E-U$]

nicht verschwindet. Folglich ist *)

$$U = (S+T)^{-1}(S-T),$$

oder wenn man $S+T=A$ setzt,

$$\varepsilon P = A^{-1}A', \qquad [-\varepsilon P = A^{-1}A'],$$
$$A(rE-P) = rA - \varepsilon A', \quad [A(rE-P) = rA + \varepsilon A'].$$

In der Determinante der Schaar $rA-\varepsilon A'$, $[rA+\varepsilon A']$ mit conjugirten Grundformen sind aber nach §. 6, I. die Elementartheiler von der Gestalt $(r-\varepsilon)^{2\varkappa}$, $[(r-\varepsilon)^{2\varkappa+1}]$ stets paarweise vorhanden. Dies ist daher auch bei der äquivalenten Schaar $rE-P$ der Fall.

Nunmehr betrachte ich irgend eine Substitution P, welche eine symmetrische Form in sich selbst transformirt. [Für alternirende Formen ist der Beweis derselbe.] Die charakteristische Function von P sei $\varphi(r) = \varphi_1(r).\varphi_2(r)$, wo $\varphi_1(r)$ das Product aller Elementartheiler ist, die für $r=\varepsilon$ verschwinden. $\varphi_2(r)$ verschwindet also nicht für $r=\varepsilon$, kann aber für $r=-\varepsilon$ Null sein. Sei m der Grad von $\varphi_1(r)$, sei P_1 eine Form der Variabeln $x_\mu, y_\mu (\mu = 1, \dots m)$, deren charakteristische Function gleich $\varphi_1(r)$ ist (und zwar in den Elementartheilern gleich), und sei P_2 eine Form der Variabeln $x_\nu, y_\nu (\nu = m+1, \dots n)$, deren charakteristische Function gleich $\varphi_2(r)$ ist. Dann ist die charakteristische Function von $P_0 = P_1 + P_2$ nach §. 5 gleich $\varphi(r)$, und folglich sind die Formen P und P_0 ähnlich. Existirt also eine symmetrische Form S von nicht verschwindender Determinante, welche durch P in sich selbst transformirt wird, so giebt es nach §. 9, II. auch eine congruente Form S_0, welche durch die Substitution P_0 in sich selbst übergeht. Nun ist aber P_0 zerlegbar, und die charakteristische Function des einen Theils verschwindet nur für $r=\varepsilon$, die des anderen aber nicht für $r=\frac{1}{\varepsilon}(=\varepsilon)$. Nach §. 9, VI. ist daher S_0 in derselben Weise wie P_0 in S_1+S_2 zerlegbar. Die Deter-

*) Will man diesen Satz nicht benutzen, so kann man den Beweis auch so führen: Sind $(r-\varepsilon)^\alpha(r-\varepsilon)^\beta\dots$ die Elementartheiler der charakteristischen Function von P, so sind $(r-\varepsilon^2)^\alpha(r-\varepsilon^2)^\beta\dots = (r-1)^\alpha(r-1)^\beta\dots$ die Elementartheiler derjenigen von P^2 (§. 7, Satz V.). Nun ist aber

$$P'SP = S, \qquad [P'TP = T],$$

und daher

$$P'S(rE-P^2) = rP'S - SP. \quad [P'T(rE-P^2) = rP'T - TP].$$

Die conjugirte Form von $B = P'S\ [P'T]$ ist $B' = SP\ [-TP]$. Folglich ist die Schaar $rE-P^2$ der Schaar $rB-B'\ [rB+B']$ mit conjugirten Grundformen äquivalent. Unter den Exponenten $\alpha, \beta, \dots$ müssen daher nach §. 6, I. die geraden [ungeraden] stets paarweise vorhanden sein.

minante von S_0 ist mithin das Product der Determinanten von S_1 und S_2. Da die erstere nicht Null ist, so können also auch die letzteren nicht verschwinden. Weil ferner S_0 symmetrisch ist, so sind es auch S_1 und S_2. Endlich zerlegt sich die Gleichung $P'_0 S_0 P_0 = S_0$ in zwei, deren eine $P'_1 S_1 P_1 = S_1$ ist. Die symmetrische Form S_1 von nicht verschwindender Determinante wird also durch die Substitution P_1 in sich selbst transformirt, deren charakteristische Function nur für $r = \varepsilon$ verschwindet. Daher müssen unter den Exponenten der Elementartheiler dieser Function die geraden stets paarweise vorhanden sein.

Ich behaupte nun, dass die gefundenen Bedingungen, zusammen mit denen des Satzes III., §. 9, auch hinreichend sind, dass also der Satz gilt:

V. ***Damit eine Substitution geeignet sei, eine symmetrische [alternirende] Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Function paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derer, welche für den Werth $+1$ oder -1 verschwinden und einen ungeraden [geraden] Exponenten haben.***

Beim Beweise beschränke ich mich wieder auf die symmetrischen Formen. Die charakteristische Function von P sei $\varphi(r) = \varphi_1(r)\varphi_2(r)$, wo $\varphi_1(r)$ das Product aller Elementartheiler ist, die für $r = -1$ verschwinden. Unter den gemachten Voraussetzungen giebt es dann nach §. 6, 3 eine Formenschaar $rA_1 + A'_1$ der Variabeln x_μ, y_μ ($\mu = 1, \dots m$), deren Determinante gleich der Function m^{ten} Grades $\varphi_1(r)$ ist (auch in den Elementartheilern gleich), und eine Formenschaar $rA_2 - A'_2$ der Variabeln x_ν, y_ν ($\nu = m+1, \dots n$), deren Determinante gleich $\varphi_2(r)$ ist. Da die Determinante von $rA_1 + A'_1$ nur für $r = -1$ verschwindet, so ist die von $A_1 + A'_1 = S_1$ nicht Null,*) und ebenso die Determinante von $A_2 + A'_2 = S_2$, mithin auch die von $S_1 + S_2 = S_0$. Setzt man ferner

$$-A_1^{-1}A'_1 = P_1, \quad A_2^{-1}A'_2 = P_2,$$

so ist

$$A_1(rE_1 - P_1) = rA_1 + A'_1, \quad A_2(rE_2 - P_2) = rA_2 - A'_2.$$

Daher ist die charakteristische Function von P_1 gleich $\varphi_1(r)$ und die von P_2 gleich $\varphi_2(r)$, also die von $P_1 + P_2 = P_0$ gleich $\varphi(r)$. Nun ist nach §. 9, VIII.

$$P'_1 S_1 P_1 = S_1, \quad P'_2 S_2 P_2 = S_2,$$

---

*) Ist $m = 0$, so erfährt der obige Beweis eine leicht anzubringende Modification.

mithin nach §. 5, III.

$$P_0' S_0 P_0 = S_0.$$

Es giebt demnach eine symmetrische Form S_0 von nicht verschwindender Determinante, welche durch die Substitution P_0 in sich selbst übergeht. Nach §. 9, II. wird folglich auch durch die Substitution P, welche P_0 ähnlich ist, eine der Form S_0 congruente Form S, also eine symmetrische Form von nicht verschwindender Determinante, in sich selbst transformirt.

Ich habe in diesem und dem vorigen Paragraphen die Eigenschaften entwickelt, welche die Elementartheiler der Determinante von $rE-P$ haben, wenn P eine Substitution ist, die eine bilineare Form, speciell eine solche von nicht verschwindender Determinante und noch specieller eine symmetrische oder alternirende in sich selbst transformirt. Alle diese Eigenschaften haben auch die Elementartheiler der Determinante von $rQ-P$, wenn P und Q zwei Substitutionen sind, welche die nämliche Form in sich selbst verwandeln. Dann ist nämlich auch PQ^{-1} eine solche Substitution, mithin haben die Elementartheiler der Determinante der Schaar

$$rE-PQ^{-1} = (rQ-P)Q^{-1}$$

die betreffenden Eigenschaften, also auch die der Determinante der äquivalenten Schaar $rQ-P$.

§. 11. Untersuchung der Grenzfälle.

Dass die Substitution U die gegebene symmetrische Form S von nicht verschwindender Determinante in sich selbst überführt, wird durch ein System von $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen ausgedrückt, welche in Bezug auf die n^2 Coefficienten $u_{\alpha\beta}$ der Form U vom zweiten Grade sind, und welche in die Formel

$$(1.)\qquad U'SU = S$$

zusammengefasst sind. Die Lösungen dieser Gleichungen sind durch die Formel

$$(2.)\qquad U = (S+T)^{-1}(S-T)$$

gegeben, welche die Unbekannten $u_{\alpha\beta}$ als rationale Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parametern $t_{\alpha\beta}$, den Coefficienten der willkürlichen Form T, darstellt. Diese Parameter sind nur der Beschränkung unterworfen, endliche Werthe zu haben, und die Determinante von $S+T$, den gemeinsamen Nenner jener rationalen Functionen, nicht zu annulliren; und die Formel (2.) stellt nur

endliche Lösungen des Gleichungssystems (1.) dar, für welche die Determinante von $E+U$ nicht verschwindet. Um eine tiefere Einsicht in das Wesen der Beziehungen zu gewinnen, welche zwischen den (durch Gleichung (1.)) beschränkt veränderlichen Grössen $u_{\alpha\beta}$ und den (nahezu) unbeschränkt veränderlichen Grössen $t_{\alpha\beta}$ bestehen, ist es nothwendig die Natur der eben erwähnten Bedingungen genauer zu erwägen.

Die quadratischen Gleichungen (1.) werden identisch erfüllt, wenn für die Grössen $u_{\alpha\beta}$ ihre Werthe aus Formel (2.) eingesetzt werden. Daher müssen sie, als algebraische Gleichungen, auch bestehen bleiben, wenn die Grössen $t_{\alpha\beta}$ sich einem der ausgeschlossenen Werthsysteme nähern. Die unabhängigen Variabeln $t_{\alpha\beta}$ und die abhängigen Variabeln $u_{\alpha\beta}$ sind durch die Gleichung (2.) oder durch die Gleichung

$$(3.)\qquad (S+T)(E+U) = 2S$$

mit einander verbunden. So lange daher die Grössen $t_{\alpha\beta}$ und $u_{\alpha\beta}$ endliche Werthe haben, ist das Product der Determinanten von $S+T$ und $E+U$ nicht Null. Man lasse nun die Veränderlichen $t_{\alpha\beta}$ sich einer Stelle nähern (d. h. man setze für die Grössen $t_{\alpha\beta}$ rationale Functionen *einer* Variabeln und lasse diese gegen einen Werth convergiren), wo die Determinante von $S+T$ verschwindet. Dann kann die Gleichung (3.) nur bestehen bleiben, wenn die Coefficienten von U nicht alle endlich bleiben. Auf diese Weise erhält man also aus der Formel (2.) die unendlichen Lösungen des Gleichungssystems (1.). Man lege ferner in (2.) den Variabeln $t_{\alpha\beta}$ unendlich grosse Werthe bei (d. h. man setze für die Grössen $t_{\alpha\beta}$ rationale Functionen *eines* Parameters h und lasse diesen sich einem Werthe nähern, für welchen einige dieser Functionen oder alle unendlich werden). Dann muss man Substitutionen U erhalten, welche S in sich selbst transformiren, und welche, falls sie endlich sind, die Determinante von $E+U$ annulliren. Denn wäre dieselbe nicht Null, so würden zufolge der Formel (3.) (oder der Formel (4.), §. 10) die Coefficienten von T alle endlich sein. Allein es wird durch diese Ueberlegungen nicht entschieden, ob die Formel (2.), wenn man den Coefficienten $t_{\alpha\beta}$ unendlich grosse Werthe ertheilt, *alle* Substitutionen U darstellt, welche S in sich selbst transformiren, und für welche die Determinante von $E+U$ verschwindet. Diese schwierige Frage wird durch folgenden Satz beantwortet:

I. *Jede Substitution U, welche eine symmetrische Form S von nicht verschwindender Determinante eigentlich in sich selbst transformirt, und für*

welche die Determinante von $E+U$ verschwindet, lässt sich auf die Gestalt

$$U = lim(S+T_h)^{-1}(S-T_h), \qquad (h=0)$$

bringen, wo T_h eine alternirende Form ist, deren Coefficienten rationale Functionen von h sind.

II. *Jede Substitution U, welche eine alternirende Form T von nicht verschwindender Determinante in sich selbst transformirt, und für welche die Determinante von $E-U$ verschwindet, lässt sich auf die Gestalt*

$$U = lim(S_h+T)^{-1}(S_h-T), \qquad (h=0)$$

bringen, wo S_h eine symmetrische Form ist, deren Coefficienten rationale Functionen von h sind.

Beim Beweise des ersten Satzes betrachte ich zunächst den speciellen Fall, wo die Determinante von $E-U$ nicht verschwindet. Dann ist (Vgl. den Beweis des Satzes III., §. 10)

$$(4.) \qquad T = \frac{E+U}{E-U}S^{-1}$$

eine alternirende Form, wie die Gleichungen

$$(E-U')STS(E-U) = (E-U')S(E+U) = SU-U'S$$

zeigen. In der Gleichung (4.), §. 9

$$(-1)^{n-p} = \varepsilon = |U| = +1$$

ist ferner die Anzahl p der Wurzeln $+1$ der charakteristischen Gleichung von U gleich Null, und daher n gerade. Mithin ist es möglich eine alternirende Form H der n Variabelnpaare x_α, y_α zu bilden, deren Determinante nicht verschwindet. Daher ist die Determinante der alternirenden Form $T+2hH$ eine ganze Function des Parameters h, die nicht identisch verschwindet, weil sie für hinreichend grosse Werthe von h nicht Null ist. Folglich ist auch

$$(5.) \qquad T_h = (T+2hH)^{-1}$$

eine alternirende Form. Nun ist aber

$$(T+2hH)(S+T_h) = TS+2hHS+E = \frac{E+U}{E-U}+E+2hHS$$

$$= \frac{2E}{E-U}+2hHS = 2(E-U)^{-1}(E+h(E-U)HS),$$

und daher

$$(S+T_h)^{-1}(T+2hH)^{-1} = \tfrac{1}{2}(E+h(E-U)HS)^{-1}(E-U).$$

Ferner ist

$$(T+2hH)(S-T_h) = TS+2hHS-E = \frac{E+U}{E-U}-E+2hHS$$

$$= \frac{2U}{E-U}+2hHS = 2(E-U)^{-1}(U+h(E-U)HS).$$

Durch Zusammensetzung beider Gleichungen ergiebt sich

$$(6.)\qquad (S+T_h)^{-1}(S-T_h) = (E+h(E-U)HS)^{-1}(U+h(E-U)HS).$$

Die rechte Seite dieser Formel wird für keinen Werth von h illusorisch, der unter einer gewissen Grenze liegt, weil die Determinante der negativen Potenz, die in ihr vorkommt, für $h = 0$ gleich Eins wird. Lässt man nun h sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$\lim(S+T_h)^{-1}(S-T_h) = U.$$

Ich bemerke noch, dass sich T_h auf die Gestalt

$$(7.)\qquad T_h = S(E+U+2h(E-U)HS)^{-1}(E-U)$$

bringen lässt, wo die Variation der Formel (4.), §. 10 in Evidenz tritt.

Ich gehe nun zu dem allgemeineren Falle über, wo die charakteristische Function $\varphi(r)$ von U sowohl für $r=1$, als auch für $r=-1$ verschwindet. Nach Gleichung (3.), §. 9

$$(-1)^q = \varepsilon = |U| = +1$$

verschwindet $\varphi(r)$ für $r=-1$ von einer geraden Ordnung q, die ich hier mit m bezeichnen will. Sei $\varphi(r) = \varphi_1(r)\varphi_2(r)$, wo $\varphi_1(r)$ das Product der Elementartheiler von $\varphi(r)$ ist, die für $r=-1$ verschwinden. Sei U_1 eine Form der Variabeln x_μ, y_μ $(\mu = 1, \dots m)$, deren charakteristische Function (in den Elementartheilern) gleich $\varphi_1(r)$ ist, und U_2 eine Form der Variabeln x_ν, y_ν $(\nu = m+1, \dots n)$, deren charakteristische Function gleich $\varphi_2(r)$ ist. Dann ist (vgl. den Beweis des Satzes V., §. 10.) $U_0 = U_1 + U_2$ der Form U ähnlich. Ist

$$GUG^{-1} = U_0,$$

so ist die Form

$$G'^{-1}SG^{-1} = S_0$$

in der nämlichen Weise wie U_0 in S_1+S_2 zerlegbar und die Gleichung

$$U_0'S_0U_0 = S_0$$

zerfällt in die beiden Gleichungen

$$U_1' S_1 U_1 = S_1, \quad U_2' S_2 U_2 = S_2.$$

Da $\varphi_1(r)$ nur für $r=-1$ verschwindet, so ist die Determinante von E_1-U_1 nicht Null, und da m eine gerade Zahl ist, so lässt sich eine alternirende Form H_1 der m Variabelnpaare x_μ, y_μ bilden, deren Determinante nicht verschwindet. Nun sind

$$(8.) \quad T_1 = \frac{E_1+U_1}{E_1-U_1} S_1^{-1}, \quad T_2 = S_2 \frac{E_2-U_2}{E_2+U_2}$$

alternirende Formen, und folglich ist auch

$$(9.) \quad T_h = G'((T_1+2hH_1)^{-1}+T_2)G$$

eine alternirende Form. Ferner ist

$$(S+T_h) = G'(S_1+(T_1+2hH_1)^{-1}+S_2+T_2)G,$$
$$(S-T_h) = G'(S_1-(T_1+2hH_1)^{-1}+S_2-T_2)G$$

und mithin (§. 5, III.)

$$(S+T_h)^{-1}(S-T_h)$$
$$= G^{-1}[(S_1+(T_1+2hH_1)^{-1})^{-1}(S_1-(T_1+2hH_1)^{-1})+(S_2+T_2)^{-1}(S_2-T_2)]G,$$

also

$$\lim(S+T_h)^{-1}(S-T_h) = G^{-1}(U_1+U_2)G = U.$$

Nach Herrn *Kronecker* heisst ein System algebraischer Gleichungen, dessen Lösungen eine $k$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden, *irreductibel*, wenn jedes andere Gleichungssystem, das mit ihm eine $k$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Lösungen gemeinsam hat, durch alle seine Lösungen befriedigt wird. Daher kann das erhaltene Resultat auch so ausgesprochen werden:

III. *Das System der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen, dem die n^2 Coefficienten einer Substitution genügen, welche eine gegebene symmetrische Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst transformirt, wird irreductibel, wenn ihm der Werth $+1$ der Substitutionsdeterminante adjungirt wird.*

Sei, um diese Theorie an einem Beispiel zu erläutern, U eine eigentliche Substitution, deren charakteristische Function $\varphi(r)$ nur für $r=+1$ und -1 verschwindet, und nur einfache Elementartheiler hat. Dann kann man $U_1 = -E_1$, $U_2 = E_2$ wählen, und daher ist nach Formel (8.) $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, also $T_h = G'(2hH_1)^{-1}G$, oder wenn man die von h unabhängige

alternirende Form $\frac{1}{2}G'H_1^{-1}G$ mit T bezeichnet, $T_h = h^{-1}T$. Mithin ist

$$U = \lim(S+h^{-1}T)^{-1}(S-h^{-1}T)^{-1} = \lim(hS+T)^{-1}(hS-T).$$

Umgekehrt stellt dieser Ausdruck, falls T irgend eine alternirende Form bedeutet, für welche seine Coefficienten endlich sind, stets eine Substitution U der angegebenen Art dar. Ist die Determinante von T nicht Null, also n gerade, so ist $U = T^{-1}(-T) = -E.$ Verschwindet aber die Determinante von T, so sei, nach aufsteigenden Potenzen von h entwickelt,

$$(10.) \quad (hS+T)^{-1} = Ah^{-\alpha}+Bh^{-\alpha+1}+\cdots,$$

wo A nicht Null und $\alpha \geqq 1$ ist. Dann ist

$$(11.) \quad E = (Ah^{-\alpha}+Bh^{-\alpha+1}+\cdots)(T+hS) = ATh^{-\alpha}+(AS+BT)h^{-\alpha+1}+\cdots,$$
$$(hS+T)^{-1}(hS-T) = -ATh^{-\alpha}+(AS-BT)h^{-\alpha+1}+\cdots.$$

Damit sich der letztere Ausdruck für $h = 0$ einer endlichen Grenze nähert, müssen die Coefficienten der negativen Potenzen von h verschwinden. Wäre also $\alpha > 1$, so müsste $AS-BT = 0$ und infolge von (11.) auch $AS+BT = 0$ sein. Es würde also AS, und weil die Determinante von S nicht verschwindet, auch A Null sein. Mithin ist $\alpha = 1$ und folglich nach (11.)

$$(12.) \quad AS+BT = E,$$

also

$$U = \lim(hS+T)^{-1}(hS-T) = AS-BT = 2AS-E.$$

Aus der Entwickelung (10.) folgt

$$E = (T+hS)(Ah^{-1}+\cdots) = TAh^{-1}+\cdots.$$

Daher ist $TA = 0$. Nun ist aber nach (12.)

$$(AS+BT)A = A$$

und demnach

$$ASA = A.$$

Folglich ist

$$U^2 = (2AS-E)^2 = 4(AS)^2-4AS+E = 4(ASA-A)S+E = E.$$

Aus der Gleichung $U^2 = E$ folgt aber nach §. 7, VII., dass die Elementartheiler der charakteristischen Function von U sämmtlich einfach sind und für $r = 1$ oder -1 verschwinden.

Wenn man T in der Gleichung (2.) durch $h^{-1}T$ ersetzt, so geht sie in

$$(13.)\qquad U = (hS+T)^{-1}(hS-T)$$

über und stellt die Coefficienten von U als homogene Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ Grössen $t_{\alpha\beta}$ und h dar. Legt man diesen Variabeln alle möglichen endlichen Werthe bei, so erhält man also auch noch nicht alle eigentlichen Substitutionen U, welche S in sich selbst transformiren, sondern von den endlichen Substitutionen nur solche, deren charakteristische Function entweder nicht für $r=-1$ verschwindet, oder nur einfache für $r=-1$ und $+1$ verschwindende Elementartheiler hat.

Nur bei *ternären* Formen stellt der Ausdruck (13.) bei endlichen Werthen von h, t_{23}, t_{31}, t_{12} alle eigentlichen Substitutionen U dar*). Denn falls die charakteristische Function $\varphi(r)$ von U für $r=-1$ Null ist, verschwindet sie von einer geraden, also von der zweiten Ordnung, und da das Product der drei Wurzeln der Gleichung $\varphi(r)=0$ gleich Eins ist, so ist die dritte Wurzel gleich Eins. Der Doppelwurzel -1 kann nicht ein Elementartheiler zweiten Grades entsprechen, weil nach §. 10, V. die für $r=-1$ verschwindenden Elementartheiler paaren Grades doppelt vorhanden sein müssen.

§. 12. Orthogonale Formen.

Eine Form, die ihrer conjugirten reciprok ist, heisst eine orthogonale Form. Da jede Form mit ihrer reciproken vertauschbar ist, so ist eine orthogonale Form R mit ihrer conjugirten

$$R' = R^{-1}$$

vertauschbar und genügt den Gleichungen

$$R'R = RR' = E,\quad R'ER = E.$$

Da mithin die orthogonalen Substitutionen die symmetrische Form E in sich selbst transformiren, so ergiebt sich aus §. 9 und 10: Das Product mehrerer orthogonalen Formen ist wieder eine orthogonale Form. Ist R eine orthogonale Form und $f(R)$ eine rationale Function von R mit nicht verschwindender Determinante, so ist auch $R^k\frac{f(R')}{f(R)}$ eine orthogonale Form. Die Elementartheiler der charakteristischen Function einer orthogonalen Form sind paarweise von gleichem Grade und für reciproke Werthe Null, mit Ausnahme

*) *Bachmann,* dieses Journal, Bd. 76, S. 335; *Hermite,* dieses Journal, Bd. 78, S. 328.

derjenigen, welche für den Werth $+1$ oder -1 verschwinden und einen ungeraden Exponenten haben. Die Elementartheiler von der Form $(r-1)^{2\varkappa}$ oder $(r+1)^{2\varkappa}$ sind also stets paarweise vorhanden. Ist umgekehrt $\varphi(r)$ ein Product von Elementartheilern von der angegebenen Beschaffenheit, so giebt es eine orthogonale Form, deren charakteristische Function in die nämlichen Elementartheiler wie $\varphi(r)$ zerfällt. Denn ist P irgend eine Form, deren charakteristische Function gleich $\varphi(r)$ ist, so giebt es nach §. 10, V. eine symmetrische Form S von nicht verschwindender Determinante, welche durch die Substitution P in sich selbst transformirt wird. Die Form S ist aber der Form E congruent (nach dem Satze, dass jede quadratische Form von nicht verschwindender Determinante als eine Summe von n Quadraten unabhängiger Linearformen dargestellt werden kann). Nach §. 9, II. giebt es daher eine der Substitution P ähnliche Substitution R, welche E in sich selbst transformirt, und da R und P ähnlich sind, so stimmen ihre charakteristischen Functionen in ihren Elementartheilern überein.

I. *Ist A eine Form von nicht verschwindender Determinante, die mit ihrer conjugirten Form vertauschbar ist, so ist*

$$R = \frac{A'}{A}$$

eine eigentliche orthogonale Form.

Denn die conjugirte Form von R ist $R' = \frac{A}{A'}$ und daher ist $RR' = E$.

II. *Ist eine symmetrische Form S mit einer alternirenden T vertauschbar, und ist die Determinante von $S+T$ nicht gleich Null, so ist*

$$R = \frac{S-T}{S+T}$$

eine eigentliche orthogonale Form.

Denn zerfällt man die Form A des Satzes I. in $S+T$, so ist $A' = S-T$, und die Formen A und A' sind vertauschbar, oder nicht, je nachdem es S und T sind.

III. *Ist T eine alternirende Form und $f(T)$ eine rationale Function von T mit nicht verschwindender Determinante, so ist*

$$R = \frac{f(-T)}{f(T)}$$

eine eigentliche orthogonale Form.

Denn die conjugirte Form von $A = f(T)$ ist $A' = f(-T)$, und diese beiden Formen sind mit einander vertauschbar (§. 3, I.).

IV. *Ist T eine alternirende Form, und ist die Determinante von $E+T$ nicht gleich Null, so ist*

$$(1.)\qquad R = \frac{E-T}{E+T}$$

eine eigentliche orthogonale Form, für welche die Determinante von $E+R$ nicht verschwindet.

Dieser Satz des Herrn *Cayley* ergiebt sich aus II., weil E eine symmetrische Form ist, die mit jeder beliebigen Form vertauschbar ist, oder aus III., indem man $f(r) = 1+r$ setzt. Er ist besonders merkwürdig, weil er sich umkehren lässt. (Vgl. §. 10, III.). Denn aus Gleichung (1.) folgt

$$R(E+T) = E-T,$$

$$(2.)\qquad (E+R)(E+T) = 2E.$$

Daher ist die Determinante der Form $E+R$ von Null verschieden. Ferner ist

$$R+RT = E-T,$$

$$T+RT = E-R,$$

$$(E+R)T = E-R,$$

$$(3.)\qquad T = \frac{E-R}{E+R}.$$

Umgekehrt ist die rechte Seite dieser Gleichung, falls R irgend eine orthogonale Form ist, stets eine alternirende Form. Denn die conjugirte Form ist

$$\frac{E-R'}{E+R'} = \frac{(E-R')R}{(E+R')R} = \frac{R-E}{R+E} = -T.$$

V. *Jede orthogonale Form R, für welche die Determinante von $E+R$ nicht verschwindet, lässt sich, und zwar nur in einer Weise, auf die Gestalt*

$$R = \frac{E-T}{E+T}$$

bringen, wo

$$T = \frac{E-R}{E+R}$$

eine alternirende Form ist.

Sind die Coefficienten von T reell, so sind es auch die von R und umgekehrt. Sind die Coefficienten von T rein imaginär, so ist die conjugirte complexe Grösse von T (die Variabeln als reell betrachtet) $-T$ und die von R

$$\frac{E+T}{E-T} = R'.$$

Mithin haben die conjugirten Coefficienten in R, $r_{\alpha\beta}$ und $r_{\beta\alpha}$, conjugirte complexe Werthe, und umgekehrt.

Ist R eine orthogonale Form, und ist die Determinante von $R+iE$ nicht gleich Null, so ist nach §. 9, I. auch

$$(4.) \qquad R_0 = \frac{E+iR}{R+iE}$$

eine solche, und es ist

$$T_0 = \frac{E-R_0}{E+R_0} = \frac{(E-R_0)(R+iE)}{(E+R_0)(R+iE)} = \frac{R+iE-E-iR}{R+iE+E+iR} = \frac{(i-1)(E-R)}{(i+1)(E+R)} = iT.$$

Ist also T reell, so ist T_0 rein imaginär. Jeder orthogonalen Form mit reellen Coefficienten R entspricht also vermöge der Formel (4.) eine orthogonale Form R_0, deren conjugirte Coefficienten conjugirte complexe Grössen sind.

Ich wende mich nun zur Untersuchung des Charakters einer orthogonalen Form mit reellen Coefficienten.

Sei a eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von R. Die Form $(rE-R)^{-1}$ ist dann eine gebrochene rationale Function von r, deren Nenner die charakteristische Function ist, und für $r=a$ von einem höheren Grade verschwindet, als der Zähler. Beginnt ihre Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $r-a$ mit

$$(5.) \qquad (rE-R)^{-1} = A(r-a)^{-\alpha}+\cdots,$$

so hat unter den Elementartheilern der charakteristischen Function von R, die für $r=a$ verschwinden, derjenige vom höchsten Grade den Exponenten α. Setzt man auf beiden Seiten mit $rE-R=(r-a)E-(R-aE)$ zusammen, so erhält man

$$E = -A(R-aE)(r-a)^{-\alpha}+\cdots$$

und daraus durch Coefficientenvergleichung

$$A(R-aE) = 0.$$

Sei b die conjugirte complexe Grösse zu a (also gleich a, wenn a reell ist) und B die conjugirte complexe Form zu A. Dann geht die Gleichung

$$AR = aA$$

durch Vertauschung von i mit $-i$ in

$$BR = bB,$$

und diese durch Uebergang zu den conjugirten Formen in

$$R'B' = bB'$$

über. Daher ist

$$(AR)(R'B') = ab\,AB',$$

oder weil $RR' = E$ ist,

$$AB'(1-ab) = 0.$$

Nun kann aber AB' nicht identisch verschwinden (§. 1., 2.). Daher ist

$$ab = 1.$$

Daraus ergiebt sich der Satz *):

VI. ***Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer reellen orthogonalen Form liegen auf dem mit dem Radius Eins um den Nullpunkt beschriebenen Kreise.***

Sie sind daher complexe Grössen, falls sie nicht gleich ± 1 sind. Bezüglich der Wurzeln $+1$ und -1 gelten die Sätze, welche in §. 9 für irgend welche cogrediente Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst entwickelt sind.

Die Reihe (5.) convergirt für die Punkte r innerhalb eines gewissen um a beschriebenen Kreises *(Convergenzkreis)*. a selbst ist ein Punkt auf dem mit dem Radius Eins um den Nullpunkt beschriebenen Kreise *(Einheitskreis)*. Ich beschränke nun die Veränderlichkeit von r auf das Stück der Peripherie des Einheitskreises, welches innerhalb des Convergenzkreises liegt. Aus Gleichung (5.) ergiebt sich, wenn man beide Seiten mit

$$(r^{-1}R^{-1})^{-1} = rR$$

zusammensetzt,

$$(R'-r^{-1}E)^{-1} = rRA(r-a)^{-\alpha}+\cdots,$$

daraus durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$(R-r^{-1}E)^{-1} = rA'R'(r-a)^{-\alpha}+\cdots.$$

Vertauscht man nun i mit $-i$, so erhält man, weil die conjugirte complexe Grösse von r gleich r^{-1} und die von a gleich a^{-1} ist,

$$(R-rE)^{-1} = B'R'r^{-1}(r^{-1}-a^{-1})^{-\alpha}+\cdots,$$

$$(rE-R)^{-1} = B'R'(-1)^{\alpha-1}a^{\alpha}r^{\alpha-1}(r-a)^{-\alpha}+\cdots,$$

*) *Brioschi*, Liouv. Journal 19, p. 253. Der Beweis des Herrn *Brioschi* stützt sich auf Satz V., ist also nicht anwendbar, wenn die Determinante von $E+R$ verschwindet. Einen andern Beweis deutet Herr *Schläfli*, dieses Journal, Bd. 65, S. 186 an. Die obige Beweismethode ist diejenige, mit Hülfe deren *Cauchy* den analogen Satz über symmetrische Formen bewiesen hat.

oder wenn man $r^{\alpha-1}$ nach Potenzen von $r-a$ entwickelt und die Constante $(-1)^{\alpha-1}a^{2\alpha-1}$ mit c bezeichnet,

$$(rE-R)^{-1} = cB'R'(r-a)^{-\alpha}+\cdots.$$

Vergleicht man diese Entwickelung mit (5.), so findet man

$$A = cB'R',$$
$$AA = c(AB')R'.$$

Da die Form AB' von Null verschieden ist, und die Determinante von R' nicht verschwindet, so kann folglich A^2 nicht gleich Null sein.

Nun erhält man aber aus der Gleichung (5.), indem man sie nach r differentiirt (§. 4, (3.))

$$-(rE-R)^{-2} = -\alpha A(r-a)^{-\alpha-1}+\cdots,$$

indem man sie aber mit sich selbst zusammensetzt,

$$(rE-R)^{-2} = A^2(r-a)^{-2\alpha}+\cdots.$$

Da A^2 nicht verschwindet, so zeigt die Vergleichung der Exponenten der Anfangsglieder, dass

$$-2\alpha = -\alpha-1, \quad \alpha = 1$$

ist (Vgl. *Weierstrass, B. M.* 1858, S. 215).

VII. *Die charakteristische Function einer reellen orthogonalen Form hat lauter einfache Elementartheiler.*

Alle Sätze, die hier über die charakteristische Function einer orthogonalen Form entwickelt sind, gelten auch von der Determinante der Schaar $rQ-P$, wo P und Q irgend zwei orthogonale Formen bedeuten.

Ist in der Formel (9.), §. 11 die symmetrische Form $S=E$ und die Substitution U eine eigentliche reelle orthogonale Substitution, so kann man, wie ich im nächsten Paragraphen zeigen werde, für G eine reelle orthogonale Form nehmen. Dann sind auch U_1 und U_2 reelle Formen, und mithin ist auch T_2 reell. Da ferner die charakteristische Function der Form U_1 der Variabeln x_μ, y_μ ($\mu = 1, \dots m$) gleich $(r+1)^m$ ist, und in m einfache Elementartheiler zerfällt, so ist U_1 der Form $-E_1$ ähnlich, es giebt also eine Substitution P_1, welche der Gleichung $P_1^{-1}(-E_1)P_1 = U_1$ genügt, und daher ist $U_1 = -E_1$ und folglich nach Formel (8.), §. 11. $T_1 = 0$. Demnach ist

$$T_h = G'((2hH_1)^{-1}+T_2)G,$$

wo man für H_1 eine reelle Form wählen kann. Setzt man also

$$G'(2H_1)^{-1}G = H, \quad G'T_2G = T,$$

so sind H und T reelle alternirende Formen, und es ist

$$(6.) \qquad R = \lim \frac{h(E-T)-H}{h(E+T)+H}.$$

§. 13. Aehnliche orthogonale Formen.

Sei A eine Form, deren charakteristische Function $\varphi(r)$ für mehr als einen Werth verschwindet, sei a eine m-fache Wurzel der Gleichung $\varphi(r) = 0$, sei $(r-a)^m = \varphi_1(r)$ und $\varphi(r) = \varphi_1(r)\varphi_2(r)$. Sei $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt, sei a eine k-fache Wurzel der Gleichung $\psi(r) = 0$, sei $(r-a)^k = \psi_1(r)$ und $\psi(r) = \psi_1(r)\psi_2(r)$. Dann ist in der Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $r-a$

$$(1.) \qquad (rE-A)^{-1} = \Sigma A_\lambda (r-a)^{\lambda-1}$$

nach §. 3 das Anfangsglied gleich $A_{-k+1}(r-a)^{-k}$. Da die Coefficienten dieser Reihe nach §. 3, IX. ganze Functionen von A sind, so sind sie mit A und unter einander vertauschbar. Setzt man beide Seiten der Gleichung (1.) mit $rE-A = (r-a)E-(A-aE)$ zusammen, so erhält man

$$E = \Sigma(A_\lambda - A_{\lambda+1}(A-aE))(r-a)^\lambda$$

und daher

$$(2.) \qquad A_\lambda = A_{\lambda+1}(A-aE) \qquad (\lambda \gtrless 0),$$

$$(3.) \qquad A_0 - E = A_1(A-aE).$$

Durch wiederholte Anwendung derselben ergiebt sich, falls λ eine positive Zahl ist,

$$(4.) \qquad A_{-\lambda} = A_0(A-aE)^\lambda,$$

$$(5.) \qquad A_0 - E = A_\lambda(A-aE)^\lambda$$

und mithin

$$A_\lambda A_{-\lambda} = A_\lambda A_0(A-aE)^\lambda = A_0 A_\lambda (A-aE)^\lambda = A_0(A_0-E).$$

Setzt man $\lambda = k$ (oder $> k$), so ist $A_{-k} = 0$ und daher *)

$$(6.) \qquad A_0^2 - A_0 = 0.$$

In der Reihe (1.) sind die Coefficienten der negativen Potenzen $A_{-k+1}, \dots A_0$ sämmtlich von Null verschieden. Denn wäre einer derselben Null, so

---

*) Die folgende Untersuchung der Form A_0 lässt sich auch mit Hülfe der Formel (4.) §. 3 sehr einfach durchführen.

müssten nach (2.) auch die vorhergehenden sämmtlich verschwinden. Ist nun $\psi_0(A_0)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A_0 genügt, so ist $\psi_0(r)$ nach Gleichung (6.) ein Divisor von $r(r-1)$. Da nicht $A_0=0$ ist, so ist auch nicht $\psi_0(r)=r$. Nach (4.) ist ferner

$$0=A_{-k}=A_0(A-aE)^k.$$

Wäre also $\psi_0(r)=r-1$, also $A_0-E=0$, so wäre $(A-aE)^k=0$ und folglich wäre nach §. 3, VI. die charakteristische Function von $A-aE$ gleich r^n und die von A gleich $(r-a)^n$, während vorausgesetzt ist, dass $\varphi(r)$ für mehr als einen Werth verschwindet. Mithin ist (6.) die Gleichung niedrigsten Grades, der A_0 genügt.

Da die Coefficienten der Reihe (1.) ganze Functionen von A sind, so sei $A_0=f(A)$. Dann ist $A_{-k}=f(A)(A-aE)^k=0$, während für $\varkappa<k$ die Form $A_{-\varkappa}=f(A)(A-aE)^\varkappa$ nicht verschwindet. Es ist also $f(r)(r-a)^k$ durch $\psi(r)=(r-a)^k\psi_2(r)$ theilbar, und folglich $f(r)$ durch $\psi_2(r)$. Dagegen ist $f(a)$ nicht Null, weil sonst auch für $\varkappa<k$ die Function $f(r)(r-a)^\varkappa$ durch $\psi(r)$ theilbar wäre. Da $\varphi_2(r)$ für die nämlichen Werthe Null ist, wie $\psi_2(r)$, so verschwindet $f(r)$ für die Wurzeln der Gleichung $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi_2(r)=0$, aber nicht für die Wurzel a der Gleichung m^{ten} Grades $\varphi_1(r)=0$. Nach §. 3, II. ist daher die charakteristische Function $\varphi_0(r)$ der Form $A_0=f(A)$ genau durch die $(n-m)^{\text{te}}$ Potenz von r theilbar. Nun verschwindet aber $\varphi_0(r)$ nur für Werthe, für welche auch $\psi_0(r)=0$ ist, also nur für $r=0$ und 1. Folglich ist $\varphi_0(r)=(r-1)^m r^{n-m}$, also $f(a)=1$. Die Determinante der Form $rE-A_0$ ist demnach durch r^{n-m} theilbar, ihre ersten Unterdeterminanten aber nach dem Bildungsgesetze von $\psi_0(r)=(r-1)r$ sämmtlich durch r^{n-m-1}. Mithin sind ihre zweiten Unterdeterminanten alle durch r^{n-m-2} theilbar u. s. w., und folglich ist in der Determinante von A_0 der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich m. Ebenso lässt sich zeigen, dass dieser Grad in der Determinante von $E-A_0$ gleich $n-m$ ist. Daher sind A_0 und $E-A_0$ den Formen

$$E_1=\Sigma_1^m x_\mu y_\mu, \quad E_2=\Sigma_{m+1}^n x_\nu y_\nu$$

äquivalent oder lassen sich auf die Gestalt

$$A_0 = \Sigma_1^m(p_{1\mu}x_1+\cdots+p_{n\mu}x_n)(q_{\mu 1}y_1+\cdots+q_{\mu n}y_n),$$
$$E-A_0 = \Sigma_{m+1}^n(p_{1\nu}x_1+\cdots+p_{n\nu}x_n)(q_{\nu 1}y_1+\cdots+q_{\nu n}y_n)$$

bringen. Durch Addition dieser Gleichungen erhält man, wenn man

$$\Sigma p_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta=P, \quad \Sigma q_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta=Q$$

setzt,

$$E=PQ, \quad Q=P^{-1}.$$

Folglich ist

$$A_0 = PE_1P^{-1}, \quad E-A_0 = PE_2P^{-1}.$$

Da A mit A_0 vertauschbar ist, so ist auch nach §. 7, II.

$$B = P^{-1}AP$$

mit

$$E_1 = P^{-1}A_0P, \quad E_2 = P^{-1}(E-A_0)P$$

vertauschbar. Von den Formen

$$E_1B = B_1, \quad E_2B = B_2$$

enthält daher nach §. 5, II. die erste nur die Variabeln x_μ, y_μ ($\mu = 1, \dots m$), die andere nur x_ν, y_ν ($\nu = m+1, \dots n$). Mithin ist

$$B = EB = (E_1+E_2)B = E_1B+E_2B$$

eine zerlegbare Form. Nun ist aber

$$B_1 = E_1B = P^{-1}A_0PP^{-1}AP = P^{-1}A_0AP,$$
$$B_2 = E_2B = P^{-1}(E-A_0)PP^{-1}AP = P^{-1}(E-A_0)AP.$$

Daher ist die charakteristische Function von B_1 gleich der von $A_0A = Af(A)$. Da $rf(r)$ für die Wurzeln der Gleichung $\varphi_2(r) = 0$ verschwindet, für $r = a$ aber gleich a ist, so ist folglich

$$|rE-B_1| = (r-a)^m r^{n-m}.$$

Da ferner $rE-B_1$ in $(rE_1-B_1)+rE_2$ zerlegbar ist, so ist

$$|rE-B_1| = |rE_1-B_1||rE_2| = |rE_1-B_1|r^{n-m}$$

und daher

$$|rE_1-B_1| = (r-a)^m = \varphi_1(r).$$

Die charakteristische Function von B ist ebenso wie die der ähnlichen Form A gleich $\varphi(r)$. Da nun B in B_1+B_2 zerlegbar ist, so ist

$$\varphi(r) = \varphi_1(r)\varphi_2(r) = |rE_1-B_1||rE_2-B_2|$$

und daher

$$|rE_2-B_2| = \varphi_2(r).$$

Ist speciell A_0 eine symmetrische Form, so kann man (nach dem bekannten Satze über die Zerlegung einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten)

$$A_0 = \Sigma(p_{1\mu}x_1+\dots+p_{n\mu}x_n)(p_{1\mu}y_1+\dots+p_{n\mu}y_n),$$
$$E-A_0 = \Sigma(p_{1\nu}x_1+\dots+p_{n\nu}x_n)(p_{1\nu}y_1+\dots+p_{n\nu}y_n)$$

setzen. Demnach ist $P^{-1} = Q = P'$, also P eine orthogonale Substitution. Ist A_0 reell, so kann man auch P reell wählen. Denn da man eine quadratische Form, in deren Determinante m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist, stets in eine Summe von m reellen positiven oder negativen Quadraten verwandeln kann, so kann man P so wählen, dass

$$p_{1\mu},\quad p_{2\mu},\quad \dots\quad p_{n\mu}$$

für die Werthe von μ, für die sie nicht alle reell sind, sämmtlich rein imaginär werden. Da aber P eine orthogonale Form ist, so ist dies unmöglich, weil sonst nicht

$$p_{1\mu}^2 + \dots + p_{n\mu}^2 = 1$$

sein würde.

Ist A eine orthogonale Form R, für welche die Determinante von $E+R$ verschwindet, und $a = -1$, so folgt aus der Gleichung

$$(7.)\qquad \frac{E}{rE-R} = \Sigma A_\lambda (r+1)^{\lambda-1}$$

durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$\frac{E}{rE-R'} = \Sigma A'_\lambda (r+1)^{\lambda-1}.$$

Nun kann man r so nahe an -1 nehmen, dass auch $\frac{1}{r}$ in der Umgebung dieser Stelle liegt. Ersetzt man r durch $\frac{1}{r}$ und erweitert links mit R, so erhält man

$$\frac{R}{R-rE} = \Sigma A'_\lambda (r+1)^{\lambda-1} r^{-\lambda}.$$

oder

$$\frac{E}{r} - \frac{E}{rE-R} = \Sigma A'_\lambda (r+1)^{\lambda-1} r^{-\lambda-1}.$$

Ist λ eine negative Zahl $-\varkappa$, oder eine positive Zahl, so kommt in der Entwicklung von $(r+1)^{-\varkappa-1} r^{\varkappa-1}$ oder $(r+1)^{\lambda-1} r^{-\lambda-1}$ nach aufsteigenden Potenzen von $r+1$ die $(-1)^{\text{te}}$ Potenz nicht vor. Ist $\lambda = 0$, so fängt die Entwicklung von $\frac{1}{r(r+1)}$ mit $-\frac{1}{r+1}$ an. Durch Vergleichung der letzten Entwicklung mit (7.) ergiebt sich daher $A'_0 = A_0$. Mithin ist A_0 eine symmetrische Form, und man kann für P eine orthogonale Substitution wählen. Eine orthogonale Form R, deren charakteristische Function für $r = -1$ ver-

schwindet, kann also durch eine orthogonale Substitution P in zwei zerlegt werden, von deren charakteristischen Functionen die eine für $r=-1$ nicht Null ist, die andere nur für $r=-1$ verschwindet. In der Formel (9.), §. 11 kann man daher, falls $S=E$ und $U=R$ ist, für G eine orthogonale Substitution wählen.

Mit Hülfe dieser Entwicklungen will ich nun über zwei ähnliche orthogonale Formen R und S einen Satz herleiten, der für reelle Formen bereits von Herrn *Schläfli* angegeben ist (dieses Journal Bd. 65, S. 185). Ist die Determinante von $E+R$, also auch die von $E+S$ nicht Null, so kann man zwei alternirende Formen T und U so bestimmen, dass

$$R=\frac{E-T}{E+T},\quad S=\frac{E-U}{E+U}$$

ist. Nach der Voraussetzung sind die beiden Schaaren

$$rE-\frac{E-T}{E+T},\quad rE-\frac{E-U}{E+U}$$

und daher auch die ihnen äquivalenten Schaaren

$$r(E+T)-(E-T),\quad r(E+U)-(E-U)$$

einander äquivalent. Da diese Schaaren aber conjugirte Grundformen haben, so können sie nach §. 6, 1. durch cogrediente Substitutionen in einander transformirt werden, oder es kann G so bestimmt werden, dass

$$G'(r(E+T)-(E-T))G = r(E+U)-(E-U),$$

also für $r=-1$

$$G'G = E$$

ist. Demnach ist G eine orthogonale Substitution.

Verschwindet aber die Determinante von $rE-R$, also auch die von $rE-U$, für $r=-1$ von der m^{ten} Ordnung, so kann man zwei orthogonale Substitutionen P und Q so bestimmen, dass

$$P'RP=R_1+R_2,\quad Q'SQ=S_1+S_2$$

ist, wo R_1 und S_1 ähnliche orthogonale Formen der Variabeln x_μ, y_μ ($\mu=1,\dots m$) sind, deren charakteristische Function nur für $r=-1$ verschwindet, R_2 und S_2 aber solche der Variabeln x_ν, y_ν ($\nu=m+1,\dots n$) sind, deren charakteristische Function nicht für $r=-1$ Null ist. Mithin giebt es zwei orthogonale Substitutionen G_1 und G_2, deren erste $-R_1$ in $-S_1$ und deren andere R_2 in S_2 transformirt. Setzt man also $P(G_1+G_2)Q^{-1}=G$, so ist $G'RG=S$ und G als Product von drei orthogonalen Formen wieder eine solche.

Sind zwei orthogonale Formen ähnlich, so sind sie auch congruent und können durch orthogonale Substitutionen in einander transformirt werden.

§. 14. Complexe Zahlen.

Aus dem Algorithmus der Zusammensetzung von Formen, d. h. von Systemen aus n^2 Grössen, die nach n Zeilen und n Colonnen geordnet sind, kann man unzählig viele andere Algorithmen herleiten. Mehrere unabhängige Formen $E, E_1, \dots E_m$ bilden ein *Formensystem*, wenn sich die Producte von je zweien derselben aus den Formen des Systems linear zusammensetzen lassen. Ist dann $A = \Sigma a_\varkappa E_\varkappa$ und $B = \Sigma b_\varkappa E_\varkappa$, so lässt sich AB auf die Gestalt $\Sigma c_\varkappa E_\varkappa$ bringen. Besonders bemerkenswerth sind solche Systeme reeller Formen, bei denen die Determinante von $\Sigma a_\varkappa E_\varkappa$ für reelle Werthe *) von $a, a_1, \dots a_m$ nicht verschwinden kann, ohne dass diese Coefficienten sämmtlich Null sind. In diesem Falle heisst die Form $\Sigma a_\varkappa E_\varkappa$ ein *Zahlencomplex* oder auch eine *complexe Zahl*, $E, E_1, \dots E_m$ heissen die *Einheiten*, und die Determinante der Form die *Norm* der complexen Zahl. Da die Norm eines Productes gleich dem Producte der Normen der Factoren ist, so kann unter den gemachten Voraussetzungen ein Product nicht verschwinden, ohne dass einer seiner Factoren Null ist.

Umgekehrt kann man auch diese Eigenschaft als Definition eines Systems complexer Zahlen benutzen. Denn sei $A = \Sigma a_\varkappa E_\varkappa$ eine Form des Systems, deren Determinante Null ist. Wenn dann $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades ist, der A genügt, so verschwindet die charakteristische Function dieser Form und daher auch $\psi(r)$ für $r = 0$. Ist $\psi(r) = r\chi(r)$, so gehört $\chi(A)$ als ganze Function von A mit reellen Coefficienten dem betrachteten Formensysteme an, und verschwindet nicht, weil $\chi(r)$ von niedrigerem Grade ist als $\psi(r)$. Dagegen ist $A\chi(A) = \psi(A) = 0$. Hat nun das betrachtete Formensystem die Eigenschaft, dass ein Product nicht verschwinden kann, ohne dass einer der Factoren Null ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass $A = 0$ ist. Wenn also die Determinante einer Form des Systems Null ist, so muss die Form selbst verschwinden.

Es ist leicht alle möglichen Systeme complexer Zahlen zu construiren. Seien $E, E_1, \dots E_m$ die unabhängigen Einheiten eines solchen Systems, sei $A = \Sigma a_\varkappa E_\varkappa$ irgend eine Zahl desselben und sei $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt. Dann muss $\psi(r)$ vom ersten oder

*) Statt der Realitätsbedingung können auch andere Beschränkungen für die Coefficienten aufgestellt werden, z. B., dass sie ganze Zahlen oder ganze, ganzzahlige Functionen gewisser Irrationalitäten sind.

zweiten Grade sein. Denn sonst könnte man $\psi(r)$ und entsprechend $\psi(A) = 0$ in (reelle) Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegen, und es würde ein Product verschwinden, ohne dass einer der Factoren Null wäre (*Hoüel, Théorie des quantités complexes, num.* 402). Ist $\psi(r)$ vom ersten Grade, so ist $\psi(A) = A - aE = 0$, also $A = aE$. Ist $\psi(r)$ vom zweiten Grade, ohne in (reelle) Factoren ersten Grades zerlegbar zu sein, so ist

$$\psi(A) = A^2 - 2pA + (p^2 + q^2)E = 0,$$

also wenn man $A = pE + qJ$ setzt, $J^2 = -E$. Man kann daher die Einheiten so ausgewählt denken, dass sie mit Ausnahme von E einzeln der Gleichung

$$(1.) \quad X^2 = -E$$

genügen. Dann ist das Quadrat der Determinante von X gleich $(-1)^n$, also ist, da die Coefficienten dieser Form als reell vorausgesetzt sind, n eine gerade Zahl, sobald $m > 0$ ist.

Ist $m = 1$ und J eine der Gleichung (1.) genügende Form, so sind, da E und J vertauschbar sind, auch je zwei der Zahlen $aE + bJ$ vertauschbar *(gewöhnliche complexe Zahlen)*. Ein solches Formensystem ist z. B. für $n = 2$

$$E = xy + x'y', \quad J = xy' - x'y.$$

Denn da E eine symmetrische und J eine alternirende Einheit ist, so ist die conjugirte Form von $A = aE + bJ$ gleich $A' = aE - bJ$, und daher ist

$$AA' = (a^2 + b^2)E.$$

Mithin ist das Quadrat der Determinante von A gleich $(a^2 + b^2)^2$, jene Determinante kann also nur verschwinden, wenn $a = b = 0$, also $A = 0$ ist. Ist $a^2 + b^2 = 1$, so ist die complexe Zahl $aE + bJ$ eine orthogonale Form.

Sodann ergiebt sich aus Gleichung (1.), dass m nicht gleich 2 sein kann. Denn sonst müsste sich das Product $E_1 E_2$ durch die drei Einheiten E, E_1, E_2 linear ausdrücken lassen,

$$E_1 E_2 = aE + bE_1 + cE_2.$$

Durch Multiplication mit E_2 würde sich folglich ergeben

$$-E_1 = aE_2 + bE_1 E_2 - cE$$

und daraus durch Elimination von $E_1 E_2$

$$(ab - c)E + (b^2 + 1)E_1 + (bc + a)E_2 = 0,$$

also wegen der Unabhängigkeit der drei Einheiten $b^2 + 1 = 0$, während doch b eine reelle Zahl ist.

Sei nun $m > 2$ und seien $E_\varkappa$ und E_λ zwei unter einander und von E unabhängige Einheiten, welche der Gleichung (1.) genügen. Dann befriedigen die complexen Zahlen $E_\varkappa + E_\lambda$ und $E_\varkappa - E_\lambda$ ebenso, wie alle anderen, Gleichungen ersten oder zweiten Grades. Wegen der Unabhängigkeit der drei Einheiten E, $E_\varkappa$, E_λ können aber jene Gleichungen nicht vom ersten Grade sein. Seien daher

$$(E_\varkappa+E_\lambda)^2 + a\,(E_\varkappa+E_\lambda) + bE = 0,$$
$$(E_\varkappa-E_\lambda)^2 + a'(E_\varkappa-E_\lambda) + b'E = 0$$

die Gleichungen zweiten Grades, denen diese Formen genügen. Durch Addition derselben ergiebt sich zufolge der Gleichung (1.)

$$(a+a')E_\varkappa + (a-a')E_\lambda + (b+b'-4)E = 0,$$

also wegen der Unabhängigkeit der drei Einheiten $a = a' = 0$. Demnach reducirt sich die erste der obigen Gleichungen auf

$$(E_\varkappa+E_\lambda)^2 + bE = 0,$$

oder wenn man $2 - b = 2s_{\varkappa\lambda} = 2s_{\lambda\varkappa}$ setzt, auf

$$E_\varkappa E_\lambda + E_\lambda E_\varkappa = 2s_{\varkappa\lambda}E.$$

Diese Gleichung bleibt, falls man $s_{\varkappa\varkappa} = -1$ setzt, auch für $\varkappa = \lambda$ gültig.

Sind nun $u_1, \dots u_m$ unbestimmte (reelle) Zahlen, und ist

$$U = \sum_\varkappa{}_1^m u_\varkappa E_\varkappa$$

eine complexe Zahl, so kann

$$U^2 = \Sigma u_\varkappa u_\lambda E_\varkappa E_\lambda = (\Sigma s_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda)E$$

nicht verschwinden, ohne dass $u_1, \dots u_m$ sämmtlich Null sind. Folglich ist die quadratische Form $\Sigma s_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda$ eine definite Form von nicht verschwindender Determinante, und weil $s_{\varkappa\varkappa} = -1$ ist, eine negative Form. Sie lässt sich daher durch eine (reelle) lineare Substitution

$$u_\varkappa = \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} v_\lambda$$

in eine Summe von m negativen Quadraten verwandeln,

$$\Sigma s_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda = -\Sigma v_\lambda^2.$$

Setzt man nun

$$(2.) \qquad J_\lambda = \sum_\varkappa a_{\varkappa\lambda} E_\varkappa,$$

so ist

$$U = \Sigma u_\varkappa E_\varkappa = \Sigma v_\lambda J_\lambda,$$

demnach

$$U^2 = (-\Sigma v_\lambda^2)E = \Sigma v_\varkappa v_\lambda J_\varkappa J_\lambda$$

und folglich

$$(3.) \qquad J_\varkappa^2 = -E, \quad J_\varkappa J_\lambda = -J_\lambda J_\varkappa.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen ist leicht zu zeigen, dass m nicht grösser als 3 sein kann. Denn sind J_1, J_2, $J_\varkappa$ drei verschiedene der Einheiten (2.), so ist

$$(J_1 J_2 J_\varkappa)^2 = J_1 J_2 (J_\varkappa J_1) J_2 J_\varkappa = -J_1 J_2 (J_1 J_\varkappa) J_2 J_\varkappa$$
$$= +J_1^2 J_2 J_\varkappa J_2 J_\varkappa = -J_2 J_\varkappa J_2 J_\varkappa = +J_2^2 J_\varkappa^2 = E,$$

mithin

$$(J_1 J_2 J_\varkappa + E)(J_1 J_2 J_\varkappa - E) = 0,$$

und folglich, weil einer der beiden Factoren verschwinden muss,

$$J_1 J_2 J_\varkappa = \pm E,$$

woraus sich durch Multiplication mit $J_\varkappa$

$$J_1 J_2 = \mp J_\varkappa$$

ergiebt. Die Vorzeichen der Einheiten $J_\varkappa (\varkappa = 3, 4, \dots m)$, über welche noch beliebig verfügt werden kann, mögen so gewählt werden, dass in diesen Gleichungen das obere Vorzeichen gilt. Wäre dann $m > 3$, so würde $J_1 J_2 = -J_3 = -J_4$ sein, während doch J_3 und J_4 unabhängig sein sollen.

Der Fall $m = 3$ ist dagegen möglich. Denn die Einheiten

$$\begin{aligned} E &= xy + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \\ J_1 &= xy_1 - x_1 y + x_2 y_3 - x_3 y_2, \\ J_2 &= xy_2 - x_2 y + x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ J_3 &= xy_3 - x_3 y + x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

genügen den Gleichungen

$$J_1^2 = -E, \qquad J_2^2 = -E, \qquad J_3^2 = -E,$$
$$J_2 J_3 = -J_3 J_2 = -J_1, \quad J_3 J_1 = -J_1 J_3 = -J_2, \quad J_1 J_2 = -J_2 J_1 = -J_3,$$
$$J_1 J_2 J_3 = E.$$

Da ferner J_1, J_2, J_3 alternirende Formen sind, so ist die conjugirte Form von $A = aE + \Sigma a_\varkappa J_\varkappa$ gleich $A' = aE - \Sigma a_\varkappa J_\varkappa$. Das Product beider ist

$$AA' = (aE)^2 - (\Sigma a_\varkappa J_\varkappa)^2 = a^2 E - a_1^2 J_1^2 - \cdots - a_1 a_2 (J_1 J_2 + J_2 J_1) - \cdots,$$

also

$$AA' = (\Sigma_0^3 a_\mu^2) E.$$

Mithin ist das Quadrat der Determinante von A gleich $(\Sigma a_\mu^2)^4$, jene Determinante kann also nur verschwinden, wenn $a_\mu = 0$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, also $A = 0$ ist. Ist $\Sigma a_\mu^2 = 1$, so ist $AA' = E$ und daher A eine orthogonale Form.

Wir sind also zu dem Resultate gelangt, dass ausser den reellen Zahlen $(m = 0)$, den imaginären Zahlen $(m = 1)$ und den Quaternionen $(m = 3)$ keine andern complexen Zahlen in dem oben definirten Sinne existiren.

Zürich, im Mai 1877.

Sur la formule de *Maclaurin*.

(Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite* à M. *Borchardt.*)

Les propriétés de la fonction de *Jacob Bernouilli* établies par M. *Malmsten* dans son beau mémoire sur la formule: $hu'_x = \Delta u_x - \frac{1}{2} h \Delta u'_x + \cdots$ (Tome 35 de ce journal, page 55) peuvent être obtenues par une autre méthode à laquelle m'ont conduit les recherches que vous avez publiées, tome 79, page 339. Reprenant à cet effet l'équation de définitions, à savoir:

$$\frac{e^{\lambda x}-1}{e^{\lambda}-1} = S(x)_0 + \frac{\lambda}{1} S(x)_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} S(x)_2 + \cdots,$$

de sorte que l'on ait pour x entier:

$$S(x)_n = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (x-1)^n,$$

je remplacerai d'abord λ par $i\lambda$, ce qui donnera:

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\lambda x}-1}{e^{i\lambda}-1} &= \frac{e^{\frac{1}{2}i\lambda x}(e^{\frac{1}{2}i\lambda x}-e^{-\frac{1}{2}i\lambda x})}{e^{\frac{1}{2}i\lambda}(e^{\frac{1}{2}i\lambda}-e^{-\frac{1}{2}i\lambda})} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}i\lambda(x-1)}\sin\frac{1}{2}\lambda x}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x\cos\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} \\ &\qquad + i\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x\sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda},\end{aligned}$$

et l'on en conclura ces deux égalités, où je fais pour abréger: $(n) = 1.2.3\ldots n$:

$$(1.)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x\sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = \lambda S(x)_1 - \frac{\lambda^3}{(3)} S(x)_3 + \frac{\lambda^5}{(5)} S(x)_5 - \cdots,$$

$$(2.)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x\cos\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = S(x)_0 - \frac{\lambda^2}{(2)} S(x)_2 + \frac{\lambda^4}{(4)} S(x)_4 - \cdots.$$

Ceci posé, la formule suivante dans laquelle B_1, B_2, etc. désignent suivant l'usage les nombres de *Bernouilli:*

$$\log\sin\tfrac{1}{2}x = \log\tfrac{1}{2}x - \frac{B_1}{(2)}\frac{x^2}{2} - \frac{B_2}{(4)}\frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{B_n}{(2n)}\frac{x^{2n}}{2n} - \cdots$$

conduit à une expression analytique des polynômes $S(x)_n$, qui met immédiatement en évidence les propriétés découvertes par M. *Malmsten.* En considérant d'abord la première de nos deux relations, on en déduit en effet:

$$\log \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x \sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = \log\tfrac{1}{2}\lambda x(x-1) + [1-x^2-(1-x)^2]\frac{B_1}{(2)}\frac{\lambda^2}{2}$$
$$+[1-x^4-(1-x)^4]\frac{B_2}{(4)}\frac{\lambda^4}{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+[1-x^{2n}-(1-x)^{2n}]\frac{B_n}{(2n)}\frac{\lambda^{2n}}{2n}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Posant donc:

$$X_n = 1-x^{2n}-(1-x)^{2n}$$

et observant que:

$$X_1 = -2x(x-1),$$

nous avons cette formule:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x \sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = -\frac{\lambda}{4}X_1 e^{\frac{B_1 X_1}{(2)}\frac{\lambda^2}{2}+\frac{B_2 X_2}{(4)}\frac{\lambda^4}{4}+\cdots}$$

dont voici les conséquences. Je remarque que le développement de l'exponentielle suivant les puissances de λ, donnera pour le coefficient d'une puissance quelconque de cette indéterminée, une fonction rationnelle et entière des quantités $X_1, X_2, \ldots X_n$, dont les coefficients seront tous positifs. On trouvera successivement en effet:

$$S(x)_1 = -\tfrac{1}{4}X_1,$$
$$S(x)_3 = \tfrac{1}{16}X_1^2,$$
$$S(x)_5 = -\tfrac{1}{192}(2X_1X_2+5X_1^3),$$
$$S(x)_7 = \tfrac{1}{2304}(16X_1X_3+42X_1^2X_2+35X_1^4)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Or X_n qui s'annule pour $x=0$ et $x=1$, n'admet dans l'intervalle de ces deux racines, qu'un seul maximum, correspondant à la valeur $x=\frac{1}{2}$, comme le montre la dérivée: $D_xX_n = -2nx^{2n-1}+2n(1-x)^{2n-1}$. Cette valeur ne dépendant point de n, fournit par conséquent le maximum de toute fonction rationnelle entière et à coefficients positifs des quantités X_n, et il est ainsi prouvé que le polynôme $(-1)^{n-1}S(x)_{2n+1}$, est positif quand la variable croît de $x=0$ à $x=1$, et acquiert sa valeur la plus grande pour $x=\frac{1}{2}$. Je passe à l'équation (2.) qui concerne les polynômes d'indices pairs, et en écrivant le premier membre sous la forme: $\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda}$, je développerai le logarithme de la quantité $\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda}$. On sera ainsi amené à em-

ployer l'expression:

$$X_n^0 = 1-(2x-1)^{2n},$$

qui permettra d'écrire:

$$\log\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = \log(2x-1)+\frac{B_1X_1^0}{(2)}\frac{\lambda^2}{2}+\frac{B_2X_2^0}{(4)}\frac{\lambda^4}{4}+\cdots$$

et par suite:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = (2x-1)e^{\frac{B_1X_1^0}{(2)}\frac{\lambda^2}{2}+\frac{B_2X_2^0}{(4)}\frac{\lambda^4}{4}+\cdots}.$$

Les polynômes X_n^0 possèdent la même propriété que les précédents de s'annuler pour $x=0$, $x=1$, et de n'admettre dans l'intervalle qu'un seul maximum correspondant à $x=\frac{1}{2}$. Il en est donc aussi de même de tous les coefficients des puissances de λ dans le développement de l'exponentielle, et en exceptant seulement $S(x)_0$, nous avons cette seconde proposition que les polynômes: $\frac{(-1)^n S(x)_{2n}}{2x-1}$ sont positifs de $x=0$ à $x=1$ avec un seul maximum dans l'intervalle pour $x=\frac{1}{2}$.

La facilité avec laquelle les propriétés des polynômes $S(x)_n$ résultent de la forme trigonométrique de leurs fonctions génératrices conduit à employer ces mêmes fonctions pour établir la formule de *Maclaurin*. A cet effet je partirai de la formule élémentaire:

$$\int U^{2n}V\,dx = U^{2n-1}V-U^{2n-2}V'+\cdots-UV^{2n-1}+\int UV^{2n}dx$$

où U et V sont deux fonctions quelconques de la variable x, dont les dérivées d'ordre k sont désignées par U^k et V^k. Posons pour abréger:

$$\Phi(x) = U^{2n-1}V+U^{2n-3}V''+\cdots+U'V^{2n-2},$$
$$\Psi(x) = U^{2n-2}V'+U^{2n-4}V'''+\cdots+UV^{2n-1},$$

ce qui donnera:

$$\int U^{2n}V\,dx = \Phi(x)-\Psi(x)+\int UV^{2n}dx,$$

en laissant arbitraire la fonction V, je prendrai:

$$U=\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x\sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = S(x)_1-\frac{\lambda^2}{1.2.3}S(x)_3+\cdots$$

et il sera facile d'obtenir les expressions de $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, si l'on met U sous la forme: $\frac{\cos\frac{1}{2}\lambda-\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}$. Ayant en effet:

$$U^{2k} = (-1)^k \lambda^{2k} \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda},$$

$$U^{2k-1} = (-1)^k \lambda^{2k-1} \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}$$

on trouvera:

$$\Phi(x) = (-1)^n \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}[\lambda^{2n-1}V - \lambda^{2n-3}V'' + \cdots - (-1)^n \lambda V^{2n-2}],$$

$$\Psi(x) = (-1)^{n-1} \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}[\lambda^{2n-2}V' - \lambda^{2n-4}V''' + \cdots + (-1)^n V^{2n-1}]$$
$$+ \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}V^{2n-1}.$$

Maintenant désignons les valeurs de V^k pour $x=1$ et $x=0$, par V_1^k et V_0^k, de ce qui précède nous déduirons les formules:

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \frac{(-1)^n}{2}[\lambda^{2n-1}(V_1+V_0) - \lambda^{2n-3}(V_1''+V_0'') + \cdots],$$

$$\Psi(1) - \Psi(0) = \frac{(-1)^{n-1}\cos\frac{1}{2}\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}[\lambda^{2n-2}(V_1'-V_0') - \lambda^{2n-4}(V_1'''-V_0''') + \cdots]$$
$$+ \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}(V_1^{2n-1} - V_0^{2n-1})$$

dont la première comme on voit renferme des sommes et la seconde des différences. Soit encore:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{2n-1}(V_1+V_0) - \lambda^{2n-3}(V_1''+V_0'') + \cdots - (-1)^n \lambda (V_1^{2n-2} + V_0^{2n-2}),$$
$$\psi(\lambda) = \lambda^{2n-2}(V_1'-V_0') - \lambda^{2n-4}(V_1'''-V_0''') + \cdots + (-1)^n \lambda^2 (V_1^{2n-3} - V_0^{2n-3}),$$

en remarquant que le terme indépendant de λ disparaît dans la seconde formule, nous pouvons écrire:

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \frac{(-1)^n}{2}\varphi(\lambda),$$

$$\Psi(1) - \Psi(0) = \frac{(-1)^{n-1}\cot\frac{1}{2}\lambda}{2}\psi(\lambda),$$

et on en conclura en prenant pour limites des intégrales, zéro et l'unité, la relation suivante:

$$(-1)^n \int_0^1 \lambda^{2n} \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda} V dx = \frac{(-1)^n}{2}\varphi(\lambda) - \frac{(-1)^{n-1}\cot\frac{1}{2}\lambda}{2}\psi(\lambda)$$
$$+ \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda - \cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda} V^{2n} dx$$

ou plus simplement:

$$\int_0^1 \lambda^{2n} \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda} V dx = \tfrac{1}{2}\varphi(\lambda) + \frac{\cot\frac{1}{2}\lambda}{2}\psi(\lambda) + (-1)^n \int_0^1 U V^{2n} dx.$$

Elle donne parmi divers résultats la formule de *Maclaurin* que j'ai eue principalement en vue, et qui s'obtient comme on va le voir en égalant les termes en λ^{2n-1}. Posons en effet: $V = f(x_0+hx)$, d'où:

$$V_1^k = h^k f^k(x_0+h), \quad V_0^k = h^k f^k(x_0);$$

le coefficient de λ^{2n-1} dans la quantité $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\lambda\,\psi(\lambda)$, s'obtient au moyen de la série:

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{1}{\lambda} - \frac{B_1\lambda}{(2)} - \frac{B_2\lambda^3}{(4)} - \frac{B_3\lambda^5}{(6)} - \cdots,$$

sous la forme suivante:

$$-\frac{B_1 h}{(2)}[f'(x_0+h)-f'(x_0)] + \frac{B_2 h^3}{(4)}[f'''(x_0+h)-f'''(x_0)]$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-3}}{(2n-2)}[f^{2n-3}(x_0+h)-f^{2n-3}(x_0)].$$

D'ailleurs dans $\varphi(\lambda)$, le coefficient du même terme est simplement

$$V_1+V_0 = f(x_0+h)+f(x_0);$$

dans la fonction

$$U = \lambda S(x)_1 - \frac{\lambda^3}{(3)}S(x)_3 + \cdots,$$

son expression est: $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}S(x)_{2n-1}$, on est par conséquent amené à l'égalité:

$$\int_0^1 f(x_0+hx)\,dx = \tfrac{1}{2}[f(x_0+h)+f(x_0)]$$
$$-\frac{B_1 h}{(2)}[f'(x_0+h)-f'(x_0)]$$
$$+\frac{B_2 h^3}{(4)}[f'''(x_0+h)-f'''(x_0)]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-3}}{(2n-2)}[f^{2n-3}(x_0+h)-f^{2n-3}(x_0)]$$
$$-\frac{h^{2n}}{(2n-1)}\int_0^1 f^{2n}(x_0+hx)\,S(x)_{2n-1}\,dx$$

qui se ramène à la forme habituelle, en remplaçant dans le premier membre l'intégrale $\int_0^1 f(x_0+hx)\,dx$ par $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx$.

La proposition de M. *Malmsten* à l'égard de $S(x)_{2n-1}$, permet ensuite d'écrire:

$$\int_0^1 f^{2n}(x_0+hx)\,S(x)_{2n-1}\,dx = f^{2n}(x_0+\theta h)\int_0^1 S(x)_{2n-1}\,dx$$

θ étant compris entre zéro et l'unité, et l'on obtient une première forme du reste en déterminant le facteur $\int_0^1 S(x)_{2n-1}\,dx$, il est donné par le coefficient de $\frac{(-1)^{n-1}\lambda^{2n-1}}{(2n-1)}$, dans le développement de l'intégrale:

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda - \cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}\,dx = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\lambda.$$

On trouve ainsi:

$$\int_0^1 S(x)_{2n-1}\,dx = (-1)^n B_n,$$

et par conséquent:

$$\int_0^1 f^{2n}(x_0+hx)\,S(x)_{2n-1}\,dx = (-1)^n B_n f^{2n}(x_0+\theta h).$$

Une seconde expression qui est principalement utile dans le calcul de la somme: $f(x_0)+f(x_0+h)+\cdots+f(x_0+mh)$, s'obtient en remplaçant sous le signe d'intégration $S(x)_{2n-1}$ par son maximum qui correspond à $x=\frac{1}{2}$. La fonction génératrice: $\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x \sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda}$ devient alors:

$$-\frac{\sin^2\frac{1}{4}\lambda}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\lambda = -2\Sigma\left(1-\frac{1}{4^n}\right)B_n\frac{\lambda^{2n-1}}{(2n)};$$

on a donc:

$$S(\tfrac{1}{2})_{2n-1} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)B_n,$$

et par suite:

$$\int_0^1 f^{2n}(x_0+hx)\,S(x)_{2n-1}\,dx = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)B_n\,\theta\,\frac{f^{2n-1}(x_0+h)-f^{2n-1}(x_0)}{h},$$

θ étant encore moindre que l'unité.

Paris, 7 avril 1877.

Sur la formule d'interpolation de *Lagrange*.

(Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite* à M. *Borchardt.*)

Je me suis proposé de trouver un polynôme entier $F(x)$ de degré $n-1$, satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\begin{array}{llll} F(a)=f(a), & F'(a)=f'(a), & \dots & F^{\alpha-1}(a)=f^{\alpha-1}(a), \\ F(b)=f(b), & F'(b)=f'(b), & \dots & F^{\beta-1}(b)=f^{\beta-1}(b), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(l)=f(l), & F'(l)=f'(l), & \dots & F^{\lambda-1}(l)=f^{\lambda-1}(l) \end{array}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. En supposant:

$$\alpha+\beta+\cdots+\lambda = n$$

la question comme on voit est déterminée, et conduira à une généralisation de la formule de *Lagrange* sur laquelle je présenterai quelques remarques. Elle se résout d'abord facilement comme il suit. Je considère une aire S, comprenant d'une part $a, b, \dots l$, et de l'autre la quantité x; je suppose qu'à son intérieur la fonction $f(x)$ soit uniforme et n'ait aucun pôle, cela étant je vais établir la relation:

$$F(x)-f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda}{(x-z)(z-a)^\alpha(z-b)^\beta\dots(z-l)^\lambda}\,dz$$

l'intégrale du second membre se rapportant au contour de S, et en même temps donner l'expression du polynôme cherché $F(x)$.

Faisons pour abréger:

$$\Phi(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda$$

et:

$$\varphi(x) = \frac{f(z)\,\Phi(x)}{(x-z)\,\Phi(z)};$$

l'intégrale curviligne sera la somme des résidus de $\varphi(z)$ pour les valeurs: $z=a,\ b,\ \dots\ l$ et $z=x$. Le dernier de ces résidus est évidemment $-f(x)$; à l'égard des autres, en considérant pour fixer les idées, celui qui correspond à $z=a$ je vais le déterminer par le calcul du terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\varphi(a+h)$, suivant les puissances croissantes de h.

Observons d'abord qu'on a:

$$\Phi(a+h) = h^{\alpha}(a-b+h)^{\beta}(a-c+h)^{\gamma}\dots(a-l+h)^{\lambda}$$

de sorte qu'en posant:

$$(a-b+h)^{-\beta}(a-c+h)^{-\gamma}\dots(a-l+h)^{-\lambda} = A+A_1h+A_2h^2+\dots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}+\dots$$

nous pourrons écrire:

$$\varphi(a+h) = \frac{f(a+h)\Phi(x)}{(x-a-h)h^{\alpha}}[A+A_1h+A_2h^2+\dots].$$

Effectuons ensuite le produit des deux séries:

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2}+\dots+f^{\alpha-1}(a)\frac{h^{\alpha-1}}{1.2\dots\alpha-1}+\dots,$$

$$\frac{1}{x-a-h} = \frac{1}{x-a}+\frac{h}{(x-a)^2}+\frac{h^2}{(x-a)^3}+\dots+\frac{h^{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}+\dots,$$

il est clair qu'on aura pour résultat:

$$\frac{f(a+h)}{x-a-h} = \frac{X_0}{x-a}+\frac{X_1h}{(x-a)^2}+\frac{X_2h^2}{(x-a)^3}+\dots+\frac{X_{\alpha-1}h^{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}+\dots$$

X_i désignant un polynôme entier en x du degré i. Il en résulte que le résidu cherché, étant le coefficient de $h^{\alpha-1}$, dans le produit:

$$\Phi(x)[A+A_1h+A_2h^2+\dots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}]$$
$$+\left[\frac{X_0}{x-a}+\frac{X_1h}{(x-a)^2}+\frac{X_2h^2}{(x-a)^3}+\dots+\frac{X_{\alpha-1}h^{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}\right],$$

aura pour expression:

$$\Phi(x)\left[\frac{AX_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1X_{\alpha-2}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}X_0}{x-a}\right],$$

ou encore:

$$(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\dots(x-l)^{\lambda}[AX_{\alpha-1}+A_1X_{\alpha-2}(x-a)+\dots+A_{\alpha-1}X_0(x-a)^{\alpha-1}].$$

C'est donc à l'égard de la variable x, un polynôme entier de degré $\alpha+\beta+\dots+\lambda-1 = n-1$; il en est de même des autres résidus de $\varphi(z)$, et par conséquent leur somme que je désignerai par $F(x)$ est bien un polynôme entier de degré $n-1$, dans la relation que nous venons d'obtenir:

$$F(x)-f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\Phi(x)}{(x-z)\Phi(z)}dz.$$

Observez maintenant que l'intégrale du second membre, renfermant comme facteur, sous le signe d'intégration la fonction $\Phi(x)$, s'annule ainsi que ses dérivées par rapport à x, jusqu'à l'ordre $\alpha-1$ pour $x=a$, jusqu'à l'ordre $\beta-1$, pour $x=b$, etc. Il est ainsi immédiatement mis en

évidence que $F(x)$ est le polynôme cherché, toutes les conditions à remplir se trouvant en effet satisfaites. Mais de plus, nous obtenons une expression de la différence entre la fonction et le polynôme d'interpolation, sous une forme permettant de reconnaître qu'elle diminue sans limite, lorsque le nombre des quantités $a, b, \ldots l$, ou bien les exposants, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, vont en augmentant. Effectivement, si nous admettons que tous les cercles passant par le point dont l'affixe est x et ayant pour centres les n points $a, b, \ldots l$ soient contenus à l'intérieur de S, les rayons de ces cercles, c'est-à-dire, les modules de $x-a, x-b, \ldots$ seront respectivement inférieurs aux modules des quantités $z-a, z-b, \ldots z-l$, lorsque la variable z décrit le contour de l'aire. Le module du facteur $\frac{\Phi(x)}{\Phi(z)}$ entrant dans l'intégrale curviligne, peut ainsi devenir moindre que toute quantité donnée, lorsqu'on augmente le degré du polynôme $F(x)$.

Cette considération est d'ailleurs exactement celle dont on fait usage à l'égard du reste de la série de *Taylor*,

$$R = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)(x-a)^\alpha}{(x-z)(z-a)^\alpha}dz,$$

lorsqu'on veut établir la convergence de cette série pour des valeurs imaginaires de la variable. J'ajouterai cette remarque que la différentiation par rapport à a, donne:

$$\frac{dR}{da} = \frac{\alpha(x-a)^{\alpha-1}}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)dz}{(z-a)^{\alpha+1}}$$

de sorte que la formule:

$$f^{(\alpha)}(a) = \frac{1.2\ldots\alpha}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)dz}{(z-a)^{\alpha+1}}$$

permet d'écrire:

$$\frac{dR}{da} = \frac{(x-a)^{\alpha-1}f^{(\alpha)}(a)}{1.2\ldots\alpha-1}$$

et l'on en conclut, R s'évanouissant pour $a=x$, la forme élémentaire du reste:

$$R = \int_x^a \frac{(x-a)^{\alpha-1}f^{(\alpha)}(a)da}{1.2\ldots\alpha-1}.$$

Après avoir rattaché à un même point de vue la série de *Taylor* et la formule d'interpolation de *Lagrange*, qui s'obtiennent comme on voit, en posant

$$\Phi(x) = (x-a)^\alpha, \quad \text{et} \quad \Phi(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

je vais considérer un nouveau cas et faire: $\Phi(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta$. Si l'expression du polynôme $F(x)$ devient alors plus compliquée, l'intégrale: $\int_a^b F(x)\,dx$ donne pour la valeur approchée de la quadrature $\int_a^b f(x)\,dx$, un résultat très-simple, auquel on parvient comme il suit.

Nommons A et B, les résidus correspondant à $z = a$ et $z = b$, de la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)(x-a)^\alpha(x-b)^\beta}{(x-z)(z-a)^\alpha(z-b)^\beta}$$

de sorte qu'on ait:

$$F(x) = A+B;$$

je montrerai d'abord, que les intégrales:

$$\mathfrak{A} = \int_a^b A\,dx, \quad \mathfrak{B} = \int_a^b B\,dx,$$

se déduisent immédiatement l'une de l'autre. Ces quantités sont en effet les coefficients de $\frac{1}{h}$, dans le développement des expressions:

$$\int_a^b \varphi(a+h)\,dx = \frac{f(a+h)}{h^\alpha(a-b+h)^\beta}\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta dx}{x-a-h},$$

et

$$\int_a^b \varphi(b+h)\,dx = \frac{f(b+h)}{h^\beta(b-a+h)^\alpha}\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta dx}{x-b-h}.$$

Or écrivons pour un moment:

$$(a,\ b,\ \alpha,\ \beta) = \frac{f(a+h)}{h^\alpha(a-b+h)^\beta}\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta dx}{x-a-h},$$

et permutons à la fois, d'une part a et b, et de l'autre α et β, ce qui donnera:

$$(b,\ a,\ \beta,\ \alpha) = \frac{f(b+h)}{h^\beta(b-a+h)^\alpha}\int_b^a \frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta dx}{x-b-h};$$

on voit que le second membre de cette égalité étant $-\mathfrak{B}$, on a simplement:

$$\int_a^b F(x)\,dx = (a,\ b,\ \alpha,\ \beta)-(b,\ a,\ \beta,\ \alpha).$$

Cette remarque faite, posons: $m = \alpha+\beta$, la formule élémentaire:

$$\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx = (b-a)^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

donne le développement:

$$\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx}{x-a-h} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)}(b-a)^m$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m)}(b-a)^{m-1}h$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha-2)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-1)}(b-a)^{m-2}h^2$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

Faisons encore: $h=(b-a)t$, on pourra l'écrire sous cette nouvelle forme:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)}(b-a)^m\left[1+\frac{m}{\alpha-1}t+\frac{m(m-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}t^2+\cdots\right].$$

Cela étant nous effectuerons la multiplication par le facteur $(a-b+h)^{-\beta}$, ou plutôt par la quantité égale: $(-1)^\beta(b-a)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}$. Des réductions qui se présentent d'elles-mêmes, montrent que le produit des deux séries:

$$1+\frac{m}{\alpha-1}t+\frac{m(m-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}t^3+\cdots,$$
$$1+\frac{\beta}{1}t+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}t^2+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}t^3+\cdots$$

a la forme simple:

$$T = 1+\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-1}t+\frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.(\alpha-2)}t^2+\frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.2.3.(\alpha-3)}t^3+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\alpha-1)}{1.2.3\ldots\alpha-1}t^{\alpha-1}+\cdots$$

de sorte qu'on a:

$$\frac{1}{(a-b+h)^\beta}\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta dx}{x-a-h} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)}(b-a)^\alpha T.$$

Mais il est préférable, en gardant seulement les puissances de h, dont l'exposant est inférieur à α, et qui nous seront seules utiles, d'ordonner le second membre suivant les puissances décroissantes de cette quantité. On obtient ainsi:

$$\frac{1}{(a-b+h)^\beta}\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta dx}{x-a-h} = \frac{\alpha}{m}(b-a)h^{\alpha-1}$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\frac{(b-a)^2h^{\alpha-2}}{2}$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(b-a)^3h^{\alpha-3}}{3}$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

En dernier lieu, multiplions par le facteur:

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2}+\cdots+f^{\alpha-1}(a)\frac{h^{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1}+\cdots$$

pour former le coefficient du terme en $h^{\alpha-1}$, qui est la quantité cherchée, nous parvenons ainsi à l'expression:

$$(a,\ b,\ \alpha,\ \beta) = \frac{\alpha}{m}(b-a)f(a)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\frac{(b-a)^2f'(a)}{1.2}$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(b-a)^3f''(a)}{1.2.3}+\cdots$$

dont la loi est manifeste.

On obtient d'une autre manière, cette formule en partant de la relation:

$$\int UV^m dx = \Theta(x)+(-1)^m\int VU^m dx,$$

où j'ai fait:

$$\Theta(x) = UV^{m-1}-U'V^{m-2}+U''V^{m-3}-\cdots.$$

Prenons en effet: $U=f(x)$, $V=(x-a)^\beta(x-b)^\alpha$, avec la condition $\alpha+\beta=m$, de sorte qu'on ait: $V^m=1.2\ldots m$. On en déduira en intégrant entre les limites $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Theta(b)-\Theta(a)}{1.2\ldots m}+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta(x-b)^\alpha dx,$$

et il est aisé de calculer $\Theta(a)$ et $\Theta(b)$. Il suffit en effet d'avoir les dérivées successives de $V=(x-a)^\beta(x-b)^\alpha$ pour $x=a$ et $x=b$; or les premières s'obtiennent en faisant $x=a+h$, et sont données par les coefficients de $h^\beta(a-b+h)^\alpha$; les autres résultent semblablement de l'expression $h^\alpha(b-a+h)^\beta$, et l'on trouve ainsi:

$$\frac{\Theta(a)}{1.2\ldots m} = \frac{\alpha}{m}(a-b)f(a)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\frac{(a-b)^2f'(a)}{1.2}$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(a-b)^3f''(a)}{1.2.3}-\cdots.$$

Ecrivons cette quantité de la manière suivante:

$$\frac{\Theta(a)}{1.2\ldots m} = -\frac{\alpha}{m}(b-a)f(a)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\frac{(b-a)^2f'(a)}{1.2}$$
$$-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(b-a)^3f''(a)}{1.2.3}-\cdots,$$

on aura de même:

$$\frac{\Theta(b)}{1.2\ldots m} = -\frac{\beta}{m}(a-b)f(b)-\frac{\beta(\beta-1)}{m(m-1)}\frac{(a-b)^2f'(b)}{1.2}$$
$$-\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(a-b)^3f''(b)}{1.2.3}-\cdots$$

et nous sommes ramenés à la formule précédemment obtenue. Mais on trouve par cette méthode, que la différence entre l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ et sa valeur approchée est la quantité:

$$\frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta(x-b)^\alpha\,dx,$$

où le facteur $(x-a)^\beta(x-b)^\alpha$, conserve toujours le même signe entre les limites de l'intégration.

Ecrivant donc:

$$\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta(x-b)^\alpha\,dx = f^m(\xi)\int_a^b (x-a)^\beta(x-b)^\alpha\,dx,$$

en désignant par ξ une quantité comprise entre a et b, on voit que pour une valeur donnée de m, l'approximation obtenue dépend du facteur

$$\int_a^b (x-a)^\beta(x-b)^\alpha\,dx,$$

ce qui conduit à déterminer α et β par la condition qu'il soit le plus petit possible. Or on trouve aisément que le minimum du produit $\Gamma(x)\Gamma(m-x)$ s'obtient en faisant $x=\frac{m}{2}$. Parmi les diverses formules qui se rapportent à la même valeur de m, c'est donc celle où $\alpha=\beta$, où figure par conséquent la dérivée de l'ordre le moins élevé de la fonction $f(x)$, qui conduit en même temps à l'approximation la plus grande.

En particulier on trouvera pour $\alpha=\beta=1$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]-\tfrac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi),$$

puis en supposant: $\alpha=\beta=2$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$
$$+\tfrac{1}{12}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]+\tfrac{1}{720}(b-a)^5 f^{\mathrm{IV}}(\xi).$$

Paris, 5 juillet 1877.

Postscriptum.

J'ai réfléchi de nouveau à ces deux origines de la série de *Taylor*, suivant qu'on la déduit, au point de vue élémentaire, de l'intégrale définie:

$$\int_x^a \frac{(x-u)^\alpha f^{\alpha+1}(u)}{1.2\ldots\alpha}\,du,$$

ou bien sous un point de vue analytique plus étendu, de l'intégrale curviligne:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{(x-a)^{\alpha+1}f(z)}{(x-z)(z-a)^{\alpha+1}}\,dz,$$

et j'ai pensé qu'il devait être possible pareillement d'arriver au polynôme d'interpolation par une autre voie qui n'exigerait pas l'emploi des variables imaginaires et des intégrales curvilignes. C'est en effet ce qui a lieu, mais il faut recourir comme vous allez le voir à la considération des intégrales multiples. En posant:

$$\Pi(z) = (z-a_0)(z-a_1)\ldots(z-a_n)$$

j'envisage l'intégrale:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{\Pi(z)}\,dz$$

où la fonction $f(z)$ est supposée continue à l'intérieur de l'aire S, qui comprend tous les points ayant pour affixes $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Si l'on désigne par $f^n(z)$, la dérivée d'ordre n de $f(z)$, et qu'on fasse:

$$u = (a_0-a_1)t_1+(a_1-a_2)t_2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)t_n+a_n,$$

l'intégrale curviligne s'exprime comme il suit au moyen d'une intégrale multiple d'ordre n. On a:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{\Pi(z)}\,dz = \int_0^1 dt_n\int_0^{t_n} dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2}\ldots\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1,$$

et nous allons aisément le démontrer.

Il vient d'abord en effet:

$$\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt = \frac{f^{n-1}[(a_0-a_2)t_2+(a_2-a_3)t_3+\cdots+a_n]}{a_0-a_1}$$
$$+\frac{f^{n-1}[(a_1-a_2)t_2+(a_2-a_3)t_3+\cdots+a_n]}{a_1-a_0},$$

puis successivement:

$$\int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1$$

$$= \frac{f^{n-2}[(a_0-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\cdots+a_n]}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}$$

$$+\frac{f^{n-2}[(a_1-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\cdots+a_n]}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}$$

$$+\frac{f^{n-2}[(a_2-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\cdots+a_n]}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)},$$

$$\int_0^{t_4} dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1$$

$$= \frac{f^{n-3}[(a_0-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\cdots+a_n]}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}$$

$$+\frac{f^{n-3}[(a_1-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\cdots+a_n]}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$+\frac{f^{n-3}[(a_2-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\cdots+a_n]}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

$$+\frac{f^{n-3}[(a_3-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\cdots+a_n]}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)},$$

en faisant usage des identités élémentaires:

$$\frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}+\frac{1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} = 0,$$

$$\frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}+\frac{1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$+\frac{1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{1}{(a_3-a_0)(a_3-a_2)(a_3-a_1)} = 0.$$

En dernier lieu, et sans qu'il soit besoin d'entrer dans des détails que la simplicité des calculs rend inutiles, on obtient pour l'intégrale multiple d'ordre n, l'expression:

$$\frac{f(a_0)}{\Pi'(a_0)}+\frac{f(a_1)}{\Pi'(a_1)}+\cdots+\frac{f(a_n)}{\Pi'(a_n)},$$

qui est en effet la valeur de l'intégrale: $\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{\Pi(z)}dz$. Appliquons ce résultat en supposant $a_0 = x$, et faisons pour abréger:

$$\Phi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n);$$

si l'on désigne comme précédemment, par $F(x)$, le polynôme d'interpolation

de *Lagrange*, on trouvera:

$$f(x)-F(x) = \Phi(x)\int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1,$$

la valeur de u pouvant être mise sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} u = x t_1 &+ a_1(t_2-t_1) \\ &+ a_2(t_3-t_2) \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &+ a_{n-1}(t_n-t_{n-1}) \\ &+ a_n(1-t_n). \end{aligned}$$

Je remarque ensuite qu'en différentiant la relation:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{(z-x)\Phi(z)}dz = \int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1$$

$\alpha-1$ fois par rapport à a_1, $\beta-1$ fois par rapport à a_2, ... $\lambda-1$ fois par rapport à a_n, nous obtiendrons dans le premier membre l'intégrale:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\lambda)f(z)}{(z-x)(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta\ldots(z-a_n)^\lambda}dz,$$

qui se trouvera donc exprimée par l'intégrale multiple:

$$\int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots\int_0^{t_2} f^\sigma(u)\,\Theta\,dt_1,$$

où j'ai fait:

$$\Theta = (t_2-t_1)^{\alpha-1}(t_3-t_2)^{\beta-1}\ldots(1-t_n)^{\lambda-1},$$
$$\sigma = \alpha+\beta+\cdots+\lambda.$$

Nous parvenons ainsi pour la formule plus générale d'interpolation, à l'expression suivante du reste:

$$f(x)-F(x) = \frac{\Phi(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\lambda)}\int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots\int_0^{t_2} f^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}(u)\,\Theta\,dt_1,$$

$\Phi(x)$ représentant le polynôme: $(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta\ldots(x-a_n)^\lambda$, c'est le résultat que je me suis proposé d'obtenir et qui me semble compléter sous un point de vue essentiel la théorie élémentaire de l'interpolation.

Bain-de-Bretagne, septembre 1877.

Zur Theorie der Functionen.

(Von Herrn *Leopold Schendel* in Tokio.)

1. Setzt man

$$f_q'(v) = \frac{f(v)-f(qv)}{(1-q)v}, \quad f_q''(v) = \frac{f_q'(v)-f_q'(qv)}{(1-q)v}, \quad \text{u. s. w.,}$$

so gilt, wenn $(q^m v - q^{\lambda-1}v)_1^\varkappa$ ein nach der Vorschrift

$$(\varphi(\lambda-1))_1^n = \frac{\varphi(-m-1)\varphi(-m)\ldots\varphi(-1)\varphi(0)\varphi(1)\ldots\varphi(n-1)}{\varphi(-m-1)\varphi(-m)\ldots\varphi(-1)}$$

gebildetes Product bedeutet und

$$\left(\frac{1-q^\lambda}{1-q}\right)_1^\varkappa = \varkappa_q!$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$f(q^m v) = \sum_0^m \frac{(q^m v - q^{\lambda-1}v)_1^\varkappa}{\varkappa_q!} f_q^\varkappa(v)$$

offenbar für $m=1$ und kann vermittelst der Gleichung

$$f_q^\varkappa(qv) = f_q^\varkappa(v) - (1-q)v f_q^{\varkappa+1}(v)$$

durch den Schluss von m auf $m+1$ als für jedes ganze positive m gültig nachgewiesen werden. Daraus ergiebt sich aber sofort, dass stets

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(x-q^{\lambda-1}v)_1^\varkappa}{\varkappa_q!} f_q^\varkappa(v)$$

oder in entwickelter Form

$$f(x) = \frac{(x-q^{\lambda-1}v)_1^0}{0_q!} f(v) + \frac{(x-q^{\lambda-1}v)_1^1}{1_q!} f_q'(v) + \frac{(x-q^{\lambda-1}v)_1^2}{2_q!} f_q''(v) + \cdots$$

ist, wenn die rechts stehende Reihe einem bestimmten endlichen Werthe zustrebt. Dieses allgemeine Theorem enthält offenbar, da die Functionen $f_q'(v)$, $f_q''(v)$, ... für $q=1$ mit den Ableitungen der Function $f(v)$ identisch sind, das *Taylor*sche Theorem als speciellen Fall in sich.

2. Bezeichnet man die $\varkappa$-malige Anwendung der im vorigen Abschnitte bezeichneten Operation auf eine Function in anderer Weise durch ein vorgesetztes $D_q^\varkappa$, so ist

$$D_q(v+q^{\lambda-1}y)_1^n = \frac{1-q^n}{1-q}(v+q^{\lambda-1}y)_1^{n-1}$$

und somit allgemein

$$D_q^\varkappa(v+q^{\lambda-1}y)_1^n = \left(\frac{1-q^{n+1-\lambda}}{1-q}\right)_1^\varkappa (v+q^{\lambda-1}y)_1^{n-\varkappa}.$$

Man erhält daher, wenn

$$\left(\frac{1-q^{n+1-\lambda}}{1-q^\lambda}\right)_1^\varkappa = \binom{n}{\varkappa}_q$$

gesetzt und damit Binomialcoefficienten verallgemeinerter Art bezeichnet werden, das allgemeine Binomialtheorem

$$(x+q^{\lambda-1}y)_1^n = \sum_0^\infty \binom{n}{\varkappa}_q (x-q^{\lambda-1}v)_1^\varkappa (v+q^{\lambda-1}y)_1^{n-\varkappa},$$

das sich in anderer Form schon in *Schellbachs* „Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen", Berlin 1864, p. 19 findet. Man kann ihm auch unter Berücksichtigung der Formel

$$(v+q^{\lambda-1}y)_1^{n+m} = (v+q^{\lambda-1}y)_1^n (v+q^{n+\lambda-1}y)_1^m$$

und der Relation

$$(v+q^{\lambda-1}y)_1^{-n} = \frac{1}{(v+q^{-\lambda}y)_1^n}$$

die Form

$$\left(\frac{x+q^{\lambda-1}y}{v+q^{\lambda-1}y}\right)_1^n = \sum_0^\infty \binom{n}{\varkappa}_q \left(\frac{x-q^{\lambda-1}v}{v+q^{n-\lambda}y}\right)_1^\varkappa$$

geben.

Setzt man in dieser Formel $q^{-n}y$ für y und beachtet, dass

$$(x+q^{\lambda-1}y)_1^n = (x+q^{n-\lambda}y)_1^n$$

ist, so gelangt man zu der Formel

$$\left(\frac{y+q^\lambda x}{y+q^\lambda v}\right)_1^n = \sum_0^\infty \binom{n}{\varkappa}_q \left(\frac{x-q^{\lambda-1}v}{v+q^{-\lambda}y}\right)_1^\varkappa,$$

die für $n=\infty$ und $q<1$ die Form

$$\left(\frac{y+q^\lambda x}{y+q^\lambda v}\right)_1^\infty = \sum_0^\infty \left(\frac{q^\lambda}{1-q^\lambda}\cdot\frac{x-q^{\lambda-1}v}{y+q^\lambda v}\right)_1^\varkappa$$

annimmt. Besondere Fälle dieser Formel sind:

$$\frac{1}{(1-q^\lambda v)_1^\infty} = \sum_0^\infty \frac{q^{\varkappa^2}v^\varkappa}{(1-q^\lambda)_1^\varkappa (1-q^\lambda v)_1^\varkappa},$$

$$(1+q^\lambda x)_1^\infty = \sum_0^\infty \frac{q^{\frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}} x^\varkappa}{(1-q^\lambda)_1^\varkappa}.$$

Ferner nehmen wir in jener Formel n negativ an und vertauschen qx mit x; dadurch erhalten wir die einfache Formel

$$\left(\frac{y+q^\lambda v}{y+q^{\lambda-1}x}\right)_1^n = \sum_0^\infty (-1)^\varkappa \left(\frac{1-q^{n-1+\lambda}}{1-q^\lambda}\cdot\frac{x-q^\lambda v}{y+q^{n+\lambda}v}\right)_1^\varkappa,$$

aus der für $y=1$, $q<1$ und $n=\infty$ die einfache Formel

$$\left(\frac{1+q^\lambda v}{1+q^{\lambda-1}x}\right)_1^\infty = \sum_0^\infty (-1)^\varkappa \left(\frac{x-q^\lambda v}{1-q^\lambda}\right)_1^\varkappa$$

hervorgeht, die in dem besonderen Falle $v=x$ allgemein bekannt ist.

Die Function $(x+q^{\lambda-1}y)_1^n$, die in dem besonderen Falle $q=1$ die Potenz $(x+y)^n$ darstellt, hat für positive und negative ganze n eine völlig

bestimmte Bedeutung, für gebrochene n dagegen ist sie nur in dem Falle $q=1$ einer einfachen Definition fähig. Doch können die allgemeineren Functionen, zu denen die Bruchpotenzen oder Wurzeln gehören, nach dem Binomialtheorem durch unendliche Reihen definirt werden. Ebenso giebt es eine Klasse von Functionen, welcher die Logarithmen angehören, und auf die man geführt wird durch die Frage nach einer Function von der Eigenschaft, dass sie, der im vorigen Abschnitte bezeichneten Operation unterworfen, zur Function $(v+q^{\lambda-1}y)_1^{-1}$ wird. Endlich sei erwähnt, dass die Exponentialfunction zu den Functionen gehört, die durch diese Operation unverändert bleiben.

Betrachtet man die in folgender Weise in Reihen zusammengestellten Grössen

$$\begin{array}{llll} (x+q^{\lambda-1}y)_1^0 x^0, & (x+q^{\lambda-1}y)_1^0 x^1, & (x+q^{\lambda-1}y)_1^0 x^2, & \dots \\ (x+q^{\lambda-1}y)_1^1 x^0, & (x+q^{\lambda-1}y)_1^1 x^1, & (x+q^{\lambda-1}y)_1^1 x^2, & \dots \\ (x+q^{\lambda-1}y)_1^2 x^0, & (x+q^{\lambda-1}y)_1^2 x^1, & (x+q^{\lambda-1}y)_1^2 x^2, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

so erkennt man unter Berücksichtigung der Gleichung

$$(x+q^{\lambda-1}y)_1^n = (x+q^{\lambda-1}y)_1^{n-1}x+q^{n-1}y\,(x+q^{\lambda-1}y)_1^{n-1}$$

sofort, dass man, wenn man mit der Null zu zählen beginnt, das $\varkappa^{\text{te}}$ Glied der n^{ten} Horizontalreihe dadurch erhält, dass man zum $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Gliede der $(n-1)^{\text{ten}}$ Reihe das mit $q^{n-1}y$ multiplicirte $\varkappa^{\text{te}}$ Glied derselben Reihe addirt. Beachtet man, dass das in der 0ten Horizontalreihe befindliche $(x+q^{\lambda-1}y)_1^0=1$ ist, so ergiebt sich daraus, dass, wenn an den Grössen

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots$$

die durch die Gleichung

$$\Delta^n x_\varkappa = \Delta^{n-1}x_{\varkappa+1}+q^{n-1}y\,\Delta^{n-1}x_\varkappa$$

oder, wenn wir $y=-q$ setzen, die durch die Gleichung

$$\Delta^n x_\varkappa = \Delta^{n-1}x_{\varkappa+1}+q^n\Delta^{n-1}x_\varkappa$$

angedeuteten Operationen der Reihe nach ausgeführt werden, die Grösse $\Delta^n x_0$ in derselben Weise aus den Grössen x_0, x_1, x_2, ... gebildet ist, wie die Grösse $(x-q^\lambda)_1^n$ aus den Potenzen von x. Es ist daher nach dem Binomialtheorem, wenn in demselben $y=-q$, $v=0$ gesetzt wird,

$$\Delta^n x_0 = \sum_0^n (-1)^{n-\varkappa}\binom{n}{\varkappa}_q q^{\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+1)}{2}} x_\varkappa.$$

Ferner erhält man durch die Annahme $y=0$, $v=q$ die Formel

$$x^n = \sum_0^n \binom{n}{\varkappa}_q q^{n-\varkappa}(x-q^\lambda)_1^\varkappa$$

und aus derselben vermittelst der Relation

$$\binom{n+1}{\varkappa+1}_q = \binom{n}{\varkappa+1}_q + \binom{n}{\varkappa}_q q^{n-\varkappa}$$

die Formel

$$\sum_0^m x^n = \sum_0^m \binom{m+1}{\varkappa+1}_q (x-q^\lambda)_1^\varkappa,$$

und es gelten daher auch die in dem besonderen Falle $q=1$ bekannten Formeln

$$x_n = \sum_0^n \binom{n}{\varkappa}_q q^{n-\varkappa} \Delta^\varkappa x_0,$$

$$\sum_0^m x_n = \sum_0^m \binom{m+1}{\varkappa+1}_q \Delta^\varkappa x_0.$$

3. Die Formel

$$(x+q^{\lambda-1}y)_1^n = (x+q^{n-\lambda}y)_1^n$$

führt, wenn man q und y beziehungsweise durch q^2 und $q^{-n+1}y$ ersetzt, auf die Relation

$$(x+q^{-n+2\lambda-1}y)_1^n = (q^{-n+2\lambda-1}x+y)_1^n,$$

der zufolge die Function

$$(e^{+i\vartheta}+q^{-n+2\lambda-1}e^{-i\vartheta})_1^n$$

bei Vertauschung von ϑ mit $-\vartheta$ ganz unverändert bleibt, während die Function

$$(e^{+i\vartheta}-q^{-n+2\lambda-1}e^{-i\vartheta})_1^n$$

sich nur bei gradem n nicht ändert, bei ungradem n dagegen das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt.

Entwickelt man diese Functionen nach dem Binomialtheorem, indem man q, x, y durch q^2, $e^{+i\vartheta}$, $\pm q^{-n+1}e^{-i\vartheta}$ ersetzt und $v=0$ annimmt, so erhält man, wenn man noch mit $q^{\frac{n^2}{4}}$ multiplicirt, die Formel

$$q^{\frac{n^2}{4}}(e^{+i\vartheta}\pm q^{-n+2\lambda-1}e^{-i\vartheta})_1^n = \sum_0^n (\pm 1)^{n-\varkappa}\binom{n}{\varkappa}_{q^2} q^{\frac{(n-2\varkappa)^2}{4}} e^{-i(n-2\varkappa)\vartheta}$$

und aus derselben zufolge der vorigen Bemerkung die Formeln

$$q^{\frac{n^2}{4}}(e^{+i\vartheta}+q^{-n+2\lambda-1}e^{-i\vartheta})_1^n = \sum_0^n \binom{n}{\varkappa}_{q^2} q^{\frac{(n-2\varkappa)^2}{4}} \cos(n-2\varkappa)\vartheta,$$

$$q^{\frac{n^2}{4}}(e^{+i\vartheta}-q^{-n+2\lambda-1}e^{-i\vartheta})_1^n = \sum_0^n (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa}_{q^2} q^{\frac{(n-2\varkappa)^2}{4}} {\cos \atop i\sin}(n-2\varkappa)\vartheta,$$

in deren letzter cos oder $i$sin zu nehmen ist, je nachdem n grade oder ungrade ist.

Nun ergiebt sich aus der Formel

$$(x+q^{\lambda-1}y)_1^{n+m} = (x+q^{n-\lambda}y)_1^n (x+q^{n+\lambda-1}y)_1^m,$$

wenn man in ihr q und y durch q^2 und $\pm q^{-n-m+1} y$ ersetzt, die Relation

$$q^{n.m}(x \pm q^{-n-m+2\lambda-1} y)_1^{n+m} = (\pm 1)^m (q^{m-n+2\lambda-1} x \pm y)_1^n (\pm x + q^{n-m+2\lambda-1} y)_1^m,$$

aus der durch die Annahme $m = n$ und $m = n-1$ die Formeln

$$q^{\frac{(2n)^2}{4}} (x \pm q^{-2n+2\lambda-1} y)_1^{2n} = (\pm 1)^n (q^{2\lambda-1} x \pm y)_1^n (\pm x + q^{2\lambda-1} y)_1^n,$$

$$q^{\frac{(2n-1)^2}{4}} (x \pm q^{-(2n-1)+2\lambda-1} y)_1^{2n-1} = (\pm 1)^{n-1} q^{\frac{1}{4}} (x \pm y)(q^{2\lambda} x \pm y)_1^{n-1} (\pm x + q^{2\lambda} y)_1^{n-1}$$

hervorgehen.

Demnach bestehen die folgenden vier Formeln:

$$(1 + 2q^{2\lambda-1} \cos 2\vartheta + q^{4\lambda-2})_1^n = \binom{2n}{n}_{q^2} + 2 \sum_1^n \binom{2n}{n-\varkappa}_{q^2} q^{\varkappa^2} \cos 2\varkappa\vartheta,$$

$$(1 - 2q^{2\lambda-1} \cos 2\vartheta + q^{4\lambda-2})_1^n = \binom{2n}{n}_{q^2} + 2 \sum_1^n (-1)^\varkappa \binom{2n}{n-\varkappa}_{q^2} q^{\varkappa^2} \cos 2\varkappa\vartheta,$$

$$2q^{\frac{1}{4}} \cos\vartheta (1 + 2q^{2\lambda} \cos 2\vartheta + q^{4\lambda})_1^{n-1} = 2 \sum_1^n \binom{2n-1}{n-\varkappa}_{q^2} q^{\frac{(2\varkappa-1)^2}{4}} \cos(2\varkappa-1)\vartheta,$$

$$2q^{\frac{1}{4}} \sin\vartheta (1 - 2q^{2\lambda} \cos 2\vartheta + q^{4\lambda})_1^{n-1} = 2 \sum_1^n (-1)^{\varkappa+1} \binom{2n-1}{n-\varkappa}_{q^2} q^{\frac{(2\varkappa-1)^2}{4}} \sin(2\varkappa-1)\vartheta,$$

aus welchen man für $q = 1$ die bekannten Formeln

$$2^{2n} \cos^{2n}\vartheta = \binom{2n}{n} + 2 \sum_1^n \binom{2n}{n-\varkappa} \cos 2\varkappa\vartheta,$$

$$2^{2n} \sin^{2n}\vartheta = \binom{2n}{n} + 2 \sum_1^n (-1)^\varkappa \binom{2n}{n-\varkappa} \cos 2\varkappa\vartheta,$$

$$2^{2n-1} \cos^{2n-1}\vartheta = 2 \sum_1^n \binom{2n-1}{n-\varkappa} \cos(2\varkappa-1)\vartheta,$$

$$2^{2n-1} \sin^{2n-1}\vartheta = 2 \sum_1^n (-1)^{\varkappa+1} \binom{2n-1}{n-\varkappa} \sin(2\varkappa-1)\vartheta,$$

und als diesen entsprechend für $q < 1$, $n = \infty$ die *Jacobi*schen Functionen

$$(1 - q^{2\lambda})_1^\infty (1 + 2q^{2\lambda-1} \cos 2\vartheta + q^{4\lambda-2})_1^\infty = 1 + 2 \sum_1^\infty q^2 \cos 2\varkappa\vartheta,$$

$$(1 - q^{2\lambda})_1^\infty (1 - 2q^{2\lambda-1} \cos 2\vartheta + q^{4\lambda-2})_1^\infty = 1 + 2 \sum_1^\infty (-1)^\varkappa q^{\varkappa^2} \cos 2\varkappa\vartheta,$$

$$2q^{\frac{1}{4}} (1 - q^{2\lambda})_1^\infty \cos\vartheta (1 + 2q^{2\lambda} \cos 2\vartheta + q^{4\lambda})_1^\infty = 2 \sum_1^\infty q^{\frac{(2\varkappa-1)^2}{4}} \cos(2\varkappa-1)\vartheta,$$

$$2q^{\frac{1}{4}} (1 - q^{2\lambda})_1^\infty \sin\vartheta (1 - 2q^{2\lambda} \cos 2\vartheta + q^{4\lambda})_1^\infty = 2 \sum_1^\infty (-1)^{\varkappa+1} q^{\frac{(2\varkappa-1)^2}{4}} \sin(2\varkappa-1)\vartheta$$

erhält.

Tokio (Yedo), im Februar 1877.

Tafeln für die dekadischen Endformen der Quadratzahlen.

(Von Herrn *Schady.*)

Bei zahlentheoretischen Rechnungen kommt es häufig darauf an, zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl Quadratzahl ist oder nicht. Da man von vorn herein weiss, dass die Antwort in der weitaus überwiegenden Anzahl von Fällen eine negative ist, so liegt es nahe, auf ein Mittel zu sinnen, um von den im Allgemeinen möglichen Fällen eine möglichst grosse Anzahl durch eine Vorfrage auszuschliessen und so die Anzahl der Fälle, in welchen die zur Entscheidung der Frage nöthige Rechnung durchgeführt werden muss, auf eine möglichst kleine Anzahl einzuschränken. Ein solches Mittel ist in den nachstehenden Tafeln I und II gegeben.

Man zähle von rechts nach links die Stellen, welche die Ziffern einer Zahl einnehmen, nenne also die Ziffer, welche die Einer angiebt, die erste, diejenige, welche die Zehner angiebt, die zweite u. s. w. Nennt man ferner den Complex der ersten 2, 3, 4, 5 Ziffern die zwei, drei, vier, fünfziffrigen Endformen der Zahlen, so enthält Tafel I die vierziffrigen Endformen der sieben- und achtstelligen Quadratzahlen. Während die vierziffrigen Endformen aller Zahlen eine Anzahl von 10000 möglichen Fällen umfassen, giebt es deren nur 1044 unter den Quadratzahlen, und diese lassen sich mit Rücksicht auf das Verhalten der vierten Ziffer in eine sehr übersichtliche Tafel bringen.

Es seien die 3 ersten Ziffern der vierziffrigen Endform einer Quadratzahl fixirt, so rechne man die Endform zur ersten Klasse, wenn die vierte Ziffer alle 10 möglichen Werthe haben kann, zur zweiten Klasse, wenn die vierte Ziffer alle fünf geraden Werthe und nur diese haben kann, zur dritten Klasse, wenn die vierte Ziffer alle fünf ungeraden Werthe und nur diese haben kann, endlich rechne man zur vierten Klasse die Endformen welche in die ersten drei Klassen nicht gehören. Ueberdies bezeichne man in Tafel I die Endformen der ersten drei Klassen in der Weise, dass an die Stelle der vierten Ziffer bei der ersten Klasse ein Punkt, bei der zweiten ein g oder bei der dritten ein u gesetzt werde. Dies vorausgesetzt,

so giebt es nur drei dreiziffrige Endformen vierter Klasse, nämlich

000, wofür die vierte Ziffer = 0,
500, - - - - - = 2,
625, - - - - - = 0,5.

Tafel I für die vierziffrigen Endformen der Quadratzahlen.

0 000	*g* 084	*g* 176	*g* 276	. 369	*g* 464	. 561	*g* 644	*u* 744	*u* 844	*u* 936
. 001	. 089	*u* 184	. 281	*u* 376	*u* 476	*g* 564	. 649	*g* 756	. 849	*g* 944
g 004	*g* 096	*g* 196	*u* 284	*g* 384	. 481	. 569	*g* 656	. 761	*u* 856	*u* 956
. 009	*g* 100	. 201	. 289	*u* 396	*g* 484	*g* 576	*u* 664	*u* 764	*g* 864	. 961
g 016	*u* 104	*u* 204	*u* 296	*g* 400	. 489	*u* 584	*g* 676	. 769	*u* 876	*g* 964
u 024	*g* 116	. 209	*g* 304	. 401	*g* 496	*g* 596	. 681	*u* 776	. 881	. 969
. 025	. 121	*u* 216	*u* 316	*g* 404	2 500	*u* 600	*u* 684	*g* 784	*g* 884	*g* 976
g 036	*u* 124	*g* 224	. 321	. 409	*u* 504	. 601	. 689	*u* 796	. 889	*u* 984
. 041	. 129	. 225	*g* 324	*g* 416	*g* 516	*u* 604	*u* 696	. 801	*g* 896	*g* 996
u 044	*u* 136	*u* 236	. 329	*u* 424	. 521	. 609	*g* 704	*g* 804	*g* 900	
. 049	*g* 144	. 241	*g* 336	*g* 436	*u* 524	*u* 616	*u* 716	. 809	*u* 904	
u 056	*u* 156	*g* 244	*u* 344	. 441	. 529	*g* 624	. 721	*g* 816	*g* 916	
g 064	. 161	. 249	*g* 356	*u* 444	*u* 536	(0.5) 625	*g* 724	*u* 824	. 921	
u 076	*g* 164	*g* 256	. 361	. 449	*g* 544	*u* 636	. 729	*g* 836	*u* 924	
. 081	. 169	*u* 264	*u* 364	*u* 456	*u* 556	. 641	*g* 736	. 841	. 929	

Tafel II enthält die fünfziffrigen Endformen der neun- und zehnstelligen Quadratzahlen. Während die fünfziffrigen Endformen aller Zahlen 100000 mögliche Fälle umfassen, giebt es deren nur 9161 unter den Quadratzahlen, und diese lassen sich wiederum mit Rücksicht auf das Verhalten der fünften Ziffer übersichtlich darstellen. Es seien die 4 ersten Ziffern der fünfziffrigen Endform einer Quadratzahl fixirt, so rechne man die Endform zur ersten Klasse, wenn die fünfte Ziffer alle 10 möglichen Werthe haben kann, zur zweiten Klasse, wenn die fünfte Ziffer alle fünf geraden Werthe und nur diese haben kann, zur dritten Klasse, wenn die fünfte Ziffer alle fünf ungeraden Werthe und nur diese haben kann, endlich rechne man zur vierten Klasse die Endformen, welche in die ersten drei Klassen nicht gehören. Ueberdies bezeichne man in Tafel II die Endformen der ersten drei Klassen in der Weise, dass an die Stelle der fünften Ziffer bei der ersten Klasse ein Punkt, bei der zweiten ein *g* oder bei der dritten ein *u* gesetzt werde. Dies vorausgesetzt, so giebt es nur vier vierziffrige Endformen vierter Klasse, nämlich

0000, wofür die fünfte Ziffer $= \begin{cases} 1, & 5, & 9 \\ 0, & 4, & 6 \end{cases}$

0625, - - - - - $= \begin{cases} 3, & 5, & 9 \\ 0, & 4, & 8 \end{cases}$

2500, - - - - - = 0, 2, 6

5625, - - - - - $= \begin{cases} 1, & 5, & 7 \\ 0, & 2, & 6 \end{cases}$

Tafel II für die fünfziffrigen Endformen der Quadratzahlen.

(1.5.9 / 0.4.6) 0000	. 0544	. 1121	. 1696	. 2281	. 2881	. 3449	. 4041	. 4624
	. 0561	*g* 1124	*u* 1716	. 2289	*g* 2884	. 3456	. 4049	. 4641
. 0001	*u* 0564	. 1129	. 1721	. 2304	. 2889	*u* 3476	. 4064	*g* 4644
g 0004	. 0569	. 1136	. 1729	. 2321	. 2896	. 3481	. 4081	. 4649
. 0009	. 0576	*g* 1156	. 1744	*u* 2324	*u* 2900	. 3489	*u* 4084	. 4656
. 0016	*u* 0596	. 1161	. 1761	. 2329	*g* 2916	. 3504	. 4089	*g* 4676
. 0025	. 0601	. 1169	*g* 1764	. 2336	. 2921	. 3521	. 4096	. 4681
g 0036	. 0609	. 1184	. 1769	*u* 2356	. 2929	*g* 3524	*g* 4100	. 4689
. 0041	. 0624	. 1201	. 1776	. 2361	. 2944	. 3529	*u* 4116	. 4704
. 0049	(3.5.9 / 0.4.8) 0625	*u* 1204	*g* 1796	. 2369	. 2961	. 3536	. 4121	. 4721
. 0064		. 1209	. 1801	. 2384	*u* 2964	*g* 3556	. 4129	*u* 4724
. 0081	. 0641	. 1216	. 1809	. 2400	. 2969	. 3561	. 4144	. 4729
u 0084	*g* 0644	. 1225	. 1824	. 2401	. 2976	. 3569	. 4161	. 4736
. 0089	. 0649	*u* 1236	. 1841	*g* 2404	*u* 2996	. 3584	*g* 4164	*u* 4756
. 0096	. 0656	. 1241	*u* 1844	. 2409	. 3001	. 3600	. 4169	. 4761
g 0100	*g* 0676	. 1249	. 1849	. 2416	. 3009	. 3601	. 4176	. 4769
u 0116	. 0681	. 1264	. 1856	*g* 2436	. 3024	*u* 3604	*g* 4196	. 4784
. 0121	. 0689	. 1281	*u* 1876	. 2441	. 3025	. 3609	. 4201	. 4801
. 0129	. 0704	*g* 1284	. 1881	. 2449	. 3041	. 3616	. 4209	*g* 4804
. 0144	. 0721	. 1289	. 1889	. 2464	*g* 3044	*u* 3636	. 4224	. 4809
. 0161	*u* 0724	. 1296	. 1904	. 2481	. 3049	. 3641	. 4225	. 4816
g 0164	. 0729	*g* 1316	. 1921	*u* 2484	. 3056	. 3649	. 4241	*g* 4836
. 0169	. 0736	. 1321	*g* 1924	. 2489	*g* 3076	. 3664	*u* 4244	. 4841
. 0176	*u* 0756	. 1329	. 1929	. 2496	. 3081	. 3681	. 4249	. 4849
g 0196	. 0761	. 1344	. 1936	(0.2.6) 2500	. 3089	*g* 3684	. 4256	. 4864
. 0201	. 0769	. 1361	*g* 1956	*u* 2516	. 3104	. 3689	*u* 4276	. 4881
. 0209	. 0784	*u* 1364	. 1961	. 2521	. 3121	. 3696	. 4281	*u* 4884
. 0224	. 0801	. 1369	. 1969	. 2529	*u* 3124	*g* 3716	. 4289	. 4889
. 0225	*g* 0804	. 1376	. 1984	. 2544	. 3129	. 3721	. 4304	. 4896
. 0241	. 0809	*u* 1396	. 2001	. 2561	. 3136	. 3729	. 4321	*g* 4900
u 0244	. 0816	. 1401	*u* 2004	*g* 2564	*u* 3156	. 3744	*g* 4324	*u* 4916
. 0249	*g* 0836	. 1409	. 2009	. 2569	. 3161	. 3761	. 4329	. 4921
. 0256	. 0841	. 1424	. 2016	. 2576	. 3169	*u* 3764	. 4336	. 4929
u 0276	. 0849	. 1441	. 2025	*g* 2596	. 3184	. 3769	*g* 4356	. 4944
. 0281	. 0864	*g* 1444	*u* 2036	. 2601	. 3201	. 3776	. 4361	. 4961
. 0289	. 0881	. 1449	. 2041	. 2609	*g* 3204	*u* 3796	. 4369	*g* 4964
. 0304	*u* 0884	. 1456	. 2049	. 2624	. 3209	. 3801	. 4384	. 4969
. 0321	. 0889	*g* 1476	. 2064	. 2641	. 3216	. 3809	. 4400	. 4976
g 0324	. 0896	. 1481	. 2081	*u* 2644	. 3225	. 3824	. 4401	*g* 4996
. 0329	*g* 0900	. 1489	*g* 2084	. 2649	. 3236	. 3841	*u* 4404	. 5001
. 0336	*u* 0916	. 1504	. 2089	. 2656	. 3241	*g* 3844	. 4409	. 5009
g 0356	. 0921	. 1521	. 2096	*u* 2676	. 3249	. 3849	. 4416	. 5024
. 0361	. 0929	*u* 1524	*u* 2100	. 2681	. 3264	. 3856	*u* 4436	. 5025
. 0369	. 0944	. 1529	*g* 2116	. 2689	. 3281	*g* 3876	. 4441	. 5041
. 0384	. 0961	. 1536	. 2121	. 2704	*u* 3284	. 3881	. 4449	*u* 5044
. 0400	*g* 0964	*u* 1556	. 2129	. 2721	. 3289	. 3889	. 4464	. 5049
. 0401	. 0969	. 1561	. 2144	*g* 2724	. 3296	. 3904	. 4481	. 5056
u 0404	. 0976	. 1569	. 2161	. 2729	*u* 3316	. 3921	. 4484	*u* 5076
. 0409	*g* 0996	. 1584	*u* 2164	. 2736	. 3321	*u* 3924	. 4489	. 5081
. 0416	. 1001	. 1600	. 2169	*g* 2756	. 3329	. 3929	. 4496	. 5089
u 0436	. 1009	. 1601	. 2176	. 2761	. 3344	. 3936	*g* 4516	. 5104
. 0441	. 1024	*g* 1604	*u* 2196	. 2769	. 3361	*u* 3956	. 4521	. 5121
. 0449	. 1025	. 1609	. 2201	. 2784	*g* 3364	. 3961	. 4529	*g* 5124
. 0464	. 1041	. 1616	. 2209	. 2801	. 3369	. 3969	. 4544	. 5129
. 0481	*u* 1044	*g* 1636	. 2224	*u* 2804	. 3376	. 3984	. 4561	. 5136
g 0484	. 1049	. 1641	. 2225	. 2809	*g* 3396	. 4001	*u* 4564	*g* 5156
. 0489	. 1056	. 1649	. 2241	. 2816	. 3401	*g* 4004	. 4569	. 5161
. 0496	*u* 1076	. 1664	*g* 2244	*u* 2836	. 3409	. 4009	. 4576	. 5169
g 0516	. 1081	. 1681	. 2249	. 2841	. 3424	. 4016	*u* 4596	. 5184
. 0521	. 1089	*u* 1684	. 2256	. 2849	. 3441	. 4025	. 4601	. 5201
. 0529	. 1104	. 1689	*g* 2276	. 2864	*u* 3444	*g* 4036	. 4609	*u* 5204

. 5209	. 5729	. 6256	. 6809	. 7344	. 7889	. 8409	*g* 8964	. 9504
. 5216	. 5744	*g* 6276	. 6816	. 7361	. 7904	. 8416	. 8969	. 9521
. 5225	. 5761	. 6281	*u* 6836	*g* 7364	. 7921	*u* 8436	. 8976	*u* 9524
u 5236	*g* 5764	. 6289	. 6841	. 7369	*u* 7924	. 8441	. 8996	. 9529
. 5241	. 5769	. 6304	. 6849	. 7376	. 7929	. 8449	. 9001	. 9536
. 5249	. 5776	. 6321	. 6864	*g* 7396	. 7936	. 8464	. 9009	*u* 9556
. 5264	*g* 5796	*u* 6324	. 6881	. 7401	*u* 7956	. 8481	. 9024	. 9561
. 5281	. 5801	. 6329	*g* 6884	. 7409	. 7961	. 8484	. 9025	. 9569
g 5284	. 5809	. 6336	. 6889	. 7424	. 7969	. 8489	. 9041	. 9584
. 5289	. 5824	*u* 6356	. 6896	. 7441	. 7984	. 8496	*u* 9044	. 9600
. 5296	. 5841	. 6361	*u* 6900	*u* 7444	. 8001	*g* 8516	. 9049	. 9601
g 5316	*u* 5844	. 6369	*g* 6916	. 7449	*g* 8004	. 8521	. 9056	*g* 9604
. 5321	. 5849	. 6384	. 6921	. 7456	. 8009	. 8529	*u* 9076	. 9609
. 5329	. 5856	. 6400	. 6929	*u* 7476	. 8016	. 8544	. 9081	. 9616
. 5344	*u* 5876	. 6401	. 6944	. 7481	. 8025	. 8561	. 9089	*g* 9636
. 5361	. 5881	*g* 6404	. 6961	. 7489	*g* 8036	*u* 8564	. 9104	. 9641
u 5364	. 5889	. 6409	*u* 6964	. 7504	. 8041	. 8569	. 9121	. 9649
. 5369	. 5904	. 6416	. 6969	. 7521	. 8049	. 8576	*g* 9124	. 9664
. 5376	. 5921	*g* 6436	. 6976	*g* 7524	. 8064	*u* 8596	. 9129	. 9681
u 5396	*g* 5924	. 6441	*u* 6996	. 7529	. 8081	. 8601	. 9136	*u* 9684
. 5401	. 5929	. 6449	. 7001	. 7536	*u* 8084	. 8609	*g* 9156	. 9689
. 5409	. 5936	. 6464	. 7009	*g* 7556	. 8089	. 8624	. 9161	. 9696
. 5424	*g* 5956	. 6481	. 7024	. 7561	. 8096	. 8641	. 9169	*u* 9716
. 5441	. 5961	*u* 6484	. 7025	. 7569	*g* 8100	*g* 8644	. 9184	. 9721
g 5444	. 5969	. 6489	. 7041	. 7584	*u* 8116	. 8649	. 9201	. 9729
. 5449	. 5984	. 6496	*g* 7044	. 7600	. 8121	. 8656	*u* 9204	. 9744
. 5456	. 6001	*u* 6516	. 7049	. 7601	. 8129	*g* 8676	. 9209	. 9761
g 5476	*u* 6004	. 6521	. 7056	*u* 7604	. 8144	. 8681	. 9216	*g* 9764
. 5481	. 6009	. 6529	*g* 7076	. 7609	. 8161	. 8689	. 9225	. 9769
. 5489	. 6016	. 6544	. 7081	. 7616	*g* 8164	. 8704	*u* 9236	. 9776
. 5504	. 6025	. 6561	. 7089	*u* 7636	. 8169	. 8721	. 9241	*g* 9796
. 5521	*u* 6036	*g* 6564	. 7104	. 7641	. 8176	*u* 8724	. 9249	. 9801
u 5524	. 6041	. 6569	. 7121	. 7649	*g* 8196	. 8729	. 9264	. 9809
. 5529	. 6049	. 6576	*u* 7124	. 7664	. 8201	. 8736	. 9281	. 9824
. 5536	. 6064	*g* 6596	. 7129	. 7681	. 8209	*u* 8756	*g* 9284	. 9841
u 5556	. 6081	. 6601	. 7136	*g* 7684	. 8224	. 8761	. 9289	*u* 9844
. 5561	*g* 6084	. 6609	*u* 7156	. 7689	. 8225	. 8769	. 9296	. 9849
. 5569	. 6089	. 6624	. 7161	. 7696	. 8241	. 8784	*g* 9316	. 9856
. 5584	. 6096	. 6641	. 7169	*g* 7716	*u* 8244	. 8801	. 9321	*u* 9876
. 5600	*u* 6100	*u* 6644	7184 .	. 7721	. 8249	*g* 8804	. 9329	. 9881
. 5601	*g* 6116	. 6649	. 7201	. 7729	. 8256	. 8809	. 9344	. 9889
g 5604	. 6121	. 6656	*g* 7204	. 7744	*u* 8276	. 8816	. 9361	. 9904
. 5609	. 6129	*u* 6676	. 7209	. 7761	. 8281	*g* 8836	*u* 9364	. 9921
. 5616	. 6144	. 6681	. 7216	*u* 7764	. 8289	. 8841	. 9369	*g* 9924
(1.5.7 / 0.2.6) 5625	. 6161	. 6689	. 7225	. 7769	. 8304	. 8849	. 9376	. 9929
	u 6164	. 6704	*g* 7236	. 7776	. 8321	. 8864	*u* 9396	. 9936
g 5636	. 6169	. 6721	. 7241	*u* 7796	*g* 8324	. 8881	. 9401	*g* 9956
. 5641	. 6176	*g* 6724	. 7249	. 7801	. 8329	*u* 8884	. 9409	. 9961
. 5649	*u* 6196	. 6729	. 7264	. 7809	. 8336	. 8889	. 9424	. 9969
. 5664	. 6201	. 6736	. 7281	. 7824	*g* 8356	. 8896	. 9441	. 9984
. 5681	. 6209	*g* 6756	*u* 7284	. 7841	. 8361	*g* 8900	*g* 9444	
u 5684	. 6224	. 6761	. 7289	*g* 7844	. 8369	*u* 8916	. 9449	
. 5689	. 6225	. 6769	. 7296	. 7849	. 8384	. 8921	. 9456	
. 5696	. 6241	. 6784	*u* 7316	. 7856	. 8400	. 8929	*g* 9476	
u 5716	*g* 6244	. 6801	. 7321	*g* 7876	. 8401	. 8944	. 9481	
. 5721	. 6249	*u* 6804	. 7329	. 7881	*u* 8404	. 8961	. 9489	

Man bemerkt leicht, dass hier die letzten drei Ziffern periodisch sind, und dass bei der Wiederholung die Bezeichnungen *g* und *u* abwechseln.

Berlin, 1876.

Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique.

(Par M. *Camille Jordan* à Paris.)

Introduction.

M. *Fuchs* s'est proposé (ce Journal, T. 81) de déterminer les divers types d'équations linéaires du second ordre

$$\frac{d^2u}{dz^2}+f(z)\frac{du}{dz}+f_1(z)u = 0$$

dont l'intégrale générale est algébrique.

A cet effet, après avoir transformé l'équation proposée en une autre ne contenant plus la dérivée $\frac{du}{dz}$, il établit, par des considérations fondées sur la théorie des covariants, qu'en désignant par x, y deux intégrales particulières de l'équation transformée, il existe une fonction entière et homogène $\varphi(x, y)$, d'un degré non supérieur à 12, qui soit racine d'une équation binôme ayant pour second membre une fonction rationnelle de la variable.

M. *Klein* a confirmé et précisé ces résultats (Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, 26 juin 1876) en s'appuyant sur la détermination qu'il avait faite précédemment (Mathematische Annalen, T. IX) des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à deux variables.

Il est aisé en effet de se rendre compte de l'identité de ces deux problèmes:

Soit

$$\frac{d^mu}{dz^m}+f_1(z)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}}+\cdots+f_m(z)u = 0$$

une équation différentielle linéaire ayant pour coefficients des fonctions monodromes de z.

Elle a un nombre infini de fonctions intégrales, chacune d'elles étant déterminée par les valeurs que prennent la fonction et ses $m-1$ premières dérivées pour la valeur initiale de z. Ces intégrales sont toutes des fonctions linéaires de m d'entre elles, $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Supposons que la variable z décrive un contour fermé arbitraire. Lorsqu'elle reviendra au point de départ, les fonctions $u_1, u_2, \ldots$ pourront redevenir les mêmes, ou plus généralement, auront été transformées en $\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \cdots$, $\alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots$, $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ étant des constantes dont le déterminant est $\gtrless 0$.

L'ensemble des substitutions

$$|u_1, \; u_2, \; \ldots \quad \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \cdots, \; \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots, \; \cdots|$$

correspondantes aux divers contours fermés que l'on peut tracer dans le plan, formera le *groupe* de l'équation différentielle proposée.

Si les diverses intégrales $u_1, u_2, \ldots$ satisfont à des équations algébriques ayant pour coefficients des fonctions monodromes de z, une intégrale quelconque

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots$$

n'aura qu'un nombre fini de valeurs distinctes; et par suite le groupe de l'équation ne contiendra qu'un nombre fini de substitutions.

Il y a donc identité entre les deux questions suivantes:

1°. Enumérer les divers types d'équations différentielles linéaires d'ordre m dont toutes les intégrales soient algébriques.

2°. Construire les divers groupes d'ordre fini que contient le groupe linéaire à m variables.

Dans le Chapitre I du présent Mémoire nous résolvons ce second problème, pour les équations du second ordre, par une méthode nouvelle et directe. Nous trouvons, d'accord avec M. *Klein**), qu'en dehors des groupes exclusivement composés de substitutions de la forme

$$|x, \; y \quad ax, \; by|$$

ou de substitutions de cette forme, combinées avec une substitution

$$|x, \; y \quad cy, \; dx|$$

il n'existe que trois types de groupes d'ordre fini.

Le premier est dérivé de substitutions des formes suivantes

$$\begin{aligned} a &= |x, \; y \quad ax, \; ay|, \\ A &= |x, \; y \quad ix, \; -iy|, \\ B &= |x, \; y \quad y, \; -x|, \\ C &= \left|x, \; y \quad m\frac{1-i}{2}(x-y), \; m\frac{1+i}{2}(x+y)\right| \end{aligned}$$

*) Voir aussi un récent mémoire de M. *Gordan* (Mathematische Annalen, T. XII).

où $i = \sqrt{-1}$, a et m étant des racines de l'unité.

Le second s'obtient en adjoignant au précédent une substitution

$$D = |x, \quad y \qquad njx, \quad nj^{-1}y|$$

où $j^8 = 1$, n étant racine de l'unité.

Le troisième type résulte de l'adjonction de substitutions de l'espèce a aux suivantes:

$$|x, \quad y \qquad \theta x, \quad \theta^{-1}y|,$$
$$|x, \quad y \qquad y, \quad -x|,$$
$$|x, \quad y \qquad \lambda x+\mu y, \quad \mu x-\lambda y|$$

où l'on a

$$\theta^{10} = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\theta^2-\theta^{-2}}, \quad \mu^2+\lambda^2+1 = 0.$$

Dans le Chapitre II, nous étendons cette méthode au cas d'un nombre quelconque p de variables, et nous arrivons à ce théorème fondamental:

Tout groupe G d'ordre fini, contenu dans le groupe linéaire à p variables, contiendra un groupe F de substitutions de la forme

$$|x, \; y, \; z, \; \ldots \quad ax, \; by, \; cz, \; \ldots|$$

auquel toutes ses substitutions seront permutables; et G aura pour ordre λf, f étant l'ordre de F, et λ un entier inférieur à une limite fixe, laquelle ne dépend que de p.

Cette proposition, qui ne diffère que par l'énoncé de celle trouvée par M. ***Fuchs*** pour le cas où $p = 2$, peut encore se formuler comme il suit:

Théorème I. ***Si une équation différentielle linéaire***

$$\frac{d^p u}{dt^p} + A_1 \frac{d^{p-1}u}{dt^{p-1}} + \cdots + A_p u = 0$$

a toutes ses intégrales algébriques, ces intégrales s'exprimeront linéairement par les racines d'équations binômes, dont les seconds membres sont des fonctions monodromes de t et des racines d'une équation auxiliaire $X = 0$.

Le degré de cette équation auxiliaire sera inférieur à une limite fixe.

Dans le Chapitre III, nous traitons le cas où $p = 3$. Les types correspondants sont les suivants:

1°. Groupes dont les substitutions sont de la forme

$$|x, \; y, \; z \qquad \alpha x+\beta y, \; \alpha' x+\beta' y, \; \gamma z|$$

les coefficients γ étant des racines de l'unité, et les coefficients α, β, α', β'

étant tels que les substitutions à deux variables

$$|x,\ y \quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y|$$

forment un groupe Γ d'ordre fini.

On obtiendra ainsi cinq sortes de groupes différents, suivant le type auquel appartient le groupe Γ.

2°. Groupes dérivés de substitutions de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ by,\ cz|$$

et de la substitution

$$S = |x,\ y,\ z \quad a'y,\ b'z,\ c'x|$$

(où les coefficients a, b, c, a', b', c' sont des racines de l'unité).

3°. Groupes obtenus par l'adjonction au groupe précédent d'une nouvelle substitution de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad a''y,\ b''x,\ c''z|$$

(où a'', b'', c'' sont des racines de l'unité).

En dehors de ces groupes, dont l'existence était évidente, il n'existe que quatre types ainsi définis:

4°. Type dérivé de la combinaison des substitutions

$$m = |x,\ y,\ z \quad mx,\ my,\ mz|,$$

$$A = |x,\ y,\ z \quad \varepsilon x,\ \varepsilon^{-1}y,\ z|,$$

$$B = |x,\ y,\ z \quad y,\ x,\ -z|,$$

$$C = \begin{vmatrix} x & ax-(1+a)y & -2a^2z \\ y & -(1-a)x-ay & +2a^2z \\ z & x-y-(1+2a)z & \end{vmatrix}$$

où ε est une racine cinquième de l'unité, a un coefficient défini par l'équation

$$a(\varepsilon+\varepsilon^{-1}-2) = 1$$

et m une racine de l'unité.

Si $m = 1$, le groupe sera d'ordre 60 et coïncidera avec le groupe formé par les substitutions qui superposent à lui-même l'icosaèdre régulier.

5°. Type dérivé des substitutions

$$m = |x,\ y,\ z \quad mx,\ my,\ mz|,$$

$$A = |x,\ y,\ z \quad x,\ \theta y,\ \theta^2 z|,$$

$$B = |x,\ y,\ z \quad y,\ z,\ x|,$$

$$rD = |x,\ y,\ z \quad rjx,\ rj\theta^2 y,\ rjz|,$$

$$r^7 E = \begin{vmatrix} x & r^2 a(x+y+\theta z) \\ y & r^2 a(x+\theta y+z) \\ z & r^2 a(x+\theta^2 y+\theta^2 z) \end{vmatrix}$$

où l'on a

$$\theta^3 = 1, \quad j^3 = \theta, \quad a^3 = \frac{1}{3(1-\theta^2)},$$

$m^{3\varrho} = 1$, $r^3 = m^\mu$ (ϱ quelconque, $\mu = 0$, 1 ou 2).

Si r et ϱ se réduisent à l'unité, ce groupe contiendra 27.24 substitutions, toutes de déterminant 1.

6°. Type dérivé des substitutions m, A, B, sDE, où $s^4 = 1$, m, m^2 ou m^3, le reste défini comme au type précédent.

7°. Type dérivé des substitutions m, A, B, sDE, tED, où $t^2 = s^2$ ou ms^2, le reste défini comme au type précédent.

Ces résultats, appliqués aux équations différentielles donnent le théorème suivant:

Théorème II. *Si l'équation linéaire du* 3e *ordre*

$$\frac{d^3u}{dt^3} + A_1\frac{d^2u}{dt^2} + A_2\frac{du}{dt} + A_3 u = 0$$

a ses intégrales algébriques, l'équation auxiliaire $X = 0$ *du théorème I aura pour degré* 1, 2, 3, 4, 5 *ou* 9. *Dans ce dernier cas, ce sera une équation Hessienne.*

Chapitre I. Equations du second ordre.

1. Soit

$$S = |u_1, \quad u_2 \quad \alpha u_1 + \beta u_2, \quad \gamma u_1 + \delta u_2|$$

une substitution linéaire à deux variables. Elle multipliera la fonction linéaire $mu_1 + nu_2$ par un facteur constant s, si l'on a identiquement

$$m(\alpha u_1 + \beta u_2) + n(\gamma u_1 + \delta u_2) = s(mu_1 + nu_2)$$

d'où

$$\alpha m + \gamma n = sm, \quad \beta m + \delta n = sn.$$

Ces deux équations de condition se réduiront à une seule, de laquelle on pourra déduire le rapport $\frac{m}{n}$, si le *déterminant caractéristique*

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha - s & \gamma \\ \beta & \delta - s \end{vmatrix}$$

se réduit à zéro.

L'équation $\Delta = 0$ étant du second degré, aura en général deux racines distinctes a et b. Il existera donc deux fonctions linéaires x, y des variables primitives (fonctions définies chacune à un facteur constant près) que S multiplie respectivement par a et b. En les prenant pour variables, S sera réduite à la forme canonique

$$|x, \; y \quad ax, \; by| , \quad \text{où} \quad a \gtrless b.$$

Nous dirons dans ce cas que S est une substitution de ***première espèce.***

Si les deux racines de l'équation en S se confondent en une seule, a, soient x une fonction linéaire que S multiplie par a, y une autre fonction linéaire. Prenant x et y pour variables, S sera réduite à la forme

$$|x, \; y \quad ax, \; cx + dy|.$$

Son équation caractéristique deviendra

$$(a-s)(d-s) = 0$$

et comme elle a la racine double a, on aura nécessairement $d = a$. Posant pour abréger $c = a\lambda$, S prendra la forme

$$|x, \; y \quad ax, \; a(y+\lambda x)|.$$

Nous dirons que S est de ***seconde espèce*** si $\lambda = 0$; de ***troisième espèce,*** si $\lambda \gtrless 0$.

2. Soit maintenant G un groupe formé d'un nombre limité de substitutions linéaires. Il ne peut contenir aucune substitution S de troisième espèce. Car il contiendrait ses puissances, qui ont pour formule générale

$$S^m = |x, \; y \quad a^m x, \; a^m(y + m\lambda x)|$$

et sont évidemment en nombre illimité. Quant aux substitutions de première espèce, leurs puissances ont pour formule

$$S^m = |x, \; y \quad a^m x, \; b^m y|$$

et seront en nombre limité, lorsque a et b seront des racines de l'unité. De même pour les substitutions de seconde espèce.

3. Nous désignerons pour abréger par a la substitution de seconde espèce $|x, \; y \quad ax, \; ay|$. Cette substitution, multipliant évidemment par a toute fonction linéaire de x, y, conservera sa forme pour tout changement linéaire de variables; et (ce qui est au fond la même chose) elle est échangeable à une substitution linéaire quelconque*).

---

*) *Définitions:* On appelle *transformée de S par T* la substitution $T^{-1}ST$.

Si $T^{-1}ST = S$, d'où $ST = TS$, les substitutions S et T sont dites ***échangeables.***

Les transformées par T des diverses substitutions d'un groupe G forment un groupe G', ***transformé*** de G par T.

Si $G' = G$, on dit que le groupe G et la substitution T sont ***permutables.***

4. Soit maintenant

$$S = |x, \; y \quad ax, \; by|$$

une substitution de première espèce; et cherchons à quelles conditions sa transformée par une substitution linéaire (de déterminant $\gtrless 0$), telle que

$$T = |x, \; y \quad \alpha x + \beta y, \; \gamma x + \delta y|$$

aura elle-même la forme canonique.

Soit

$$U = |x, \; y \quad cx, \; dy|$$

cette transformée. On a $U = T^{-1}ST$, d'où $ST = TU$. Mais on a

$$ST = |x, \; y \quad \alpha a x + \beta b y, \; \gamma a x + \delta b y|$$
$$TU = |x, \; y \quad c(\alpha x + \beta y), \; d(\gamma x + \delta y)|$$

d'où les équations de condition

$$\alpha a = \alpha c, \quad \beta b = \beta c, \quad \gamma a = \gamma d, \quad \delta b = \delta d.$$

D'ailleurs $\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$, et $a \gtrless b$. Ces équations ne pourront donc être satisfaites qu'en posant ou bien

$$(1.) \quad \beta = \gamma = 0, \quad c = a, \quad b = d$$

d'où

$$(2.) \quad U = S, \quad T = |x, \; y \quad \alpha x, \; \delta y|,$$

ou bien

$$(3.) \quad \alpha = \delta = 0, \quad c = b, \quad d = a$$

d'où

$$(4.) \quad U = |x, \; y \quad bx, \; ay|, \quad T = |x, \; y \quad \beta y, \; \gamma x|.$$

Les relations que nous venons de trouver nous permettent d'énoncer la proposition suivante.

Théorème. *Pour qu'une substitution T soit échangeable à une substitution S de première espèce, il faut et il suffit qu'en choisissant les variables indépendantes x, y de manière à réduire S à sa forme canonique, T prenne également la forme canonique.*

On en déduit cette conséquence évidente:

Les diverses substitutions T, T', ... échangeables à une substitution S de première espèce sont échangeables entre elles.

5. Nous sommes actuellement en mesure de signaler deux types de groupes d'ordre fini*).

---

*) On nomme *ordre* d'un groupe le nombre de ses substitutions.

Premier type. On l'obtiendra en combinant ensemble des substitutions canoniques

(5.) $S = |x, y \quad ax, by|$, $S' = |x, y \quad a'x, b'y|$, ...

en nombre fini quelconque, où les coefficients $a, b, a', b', \ldots$ soient des racines de l'unité.

Tout groupe G formé d'un nombre fini de substitutions échangeables entre elles appartiendra à ce type. En effet, si parmi les substitutions dont il est dérivé il en est une S de première espèce, ramenons-la à sa forme canonique $S = |x, y \quad ax, by|$. Les autres substitutions $S', \ldots$ du groupe, étant échangeables à celle-là, prendront également la forme canonique. Si au contraire toutes les substitutions de G sont de seconde espèce, elles auront la forme canonique, quel que soit le choix des variables.

6. Deuxième type. Pour le former, adjoignons au groupe G dérivé des substitutions (5.) une substitution de la forme

$$(6.) \qquad T = |x, y \quad y, kx|$$

où k soit une racine de l'unité. Le groupe obtenu par cette adjonction contiendra les substitutions (5.), leurs transformées

$$|x, y \quad bx, ay|, \quad |x, y \quad b'x, a'y|, \quad \ldots$$

par la substitution T, et la substitution

$$T^2 = |x, y \quad kx, ky|.$$

Ces substitutions combinées ensemble, donneront un groupe G' appartenant au premier type et d'ordre fini. La substitution T étant évidemment permutable à ce groupe G', lequel contient d'ailleurs T^2, il est clair que son adjonction au groupe G' doublera le nombre de ses substitutions.

7. ***Tout groupe H d'ordre fini, dont les substitutions sont permutables à celles d'un groupe G' du premier type, lequel contient une substitution S de première espèce, appartiendra au premier ou au second type.***

Choisissons en effet les variables x, y de manière à ramener les substitutions de G' à la forme canonique. Toute substitution de H, transformant S en une autre substitution canonique, sera de l'une des deux formes

$$|x, y \quad \alpha x, \delta y|, \quad |x, y \quad \beta y, \gamma x|.$$

Si toutes les substitutions de H sont de la première forme, H appartiendra au premier type. Si au contraire H contient des substitutions de la seconde forme, elles résulteront évidemment de la combinaison d'une seule d'entre elles

$$T = |x, y \quad \beta y, \gamma x|$$

avec les substitutions de la première forme que H contient. Celles-ci forment un groupe du premier type et ne changent pas de forme si l'on prend pour variable $\beta y = y'$ à la place de y; changement qui donne à T la forme

$$|x, \; y' \quad y', \; kx|$$

en posant pour abréger $\beta\gamma = k$.

8. Cherchons à déterminer les groupes d'ordre fini qui peuvent exister en dehors des types ci-dessus.

Soient G un semblable groupe; Ω son ordre; g le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont de seconde espèce; ω son ordre.

Considérons une substitution S, arbitrairement choisie parmi les substitutions de première espèce que G contient. Celles des substitutions de G qui sont échangeables à S forment un faisceau F, contenant évidemment toutes les substitutions de g; l'ordre de ce faisceau sera donc un multiple de ω, tel que $\mu\omega$. D'ailleurs μ sera >1, puisque F contient la substitution S, qui n'appartient pas à g.

Si nous prenons successivement pour point de départ les diverses substitutions $S, S', \ldots$ de première espèce que G contient, nous obtiendrons une suite de faisceaux $F, F', \ldots$ dont chacun contiendra toutes les substitutions de g.

Au contraire, une substitution S de première espèce ne peut être contenue dans deux faisceaux *différents* de la suite $F, F', \ldots$ Supposons en effet que S soit contenue dans le faisceau F'. Les substitutions de ce faisceau, étant échangeables à S', seront échangeables entre elles (N°. 4.) Elles sont donc échangeables à S, et par suite appartiendront au faisceau F. Donc F' est contenu tout entier dans F. Réciproquement, F contenant F', contiendra en particulier la substitution S' et par suite sera contenu dans F'. Donc les faisceaux F et F' seront identiques.

9. Cela posé, admettons que la substitution S ait été réduite à la forme canonique

$$(7.) \qquad S = |x, \; y \quad ax, \; by|.$$

Le faisceau correspondant F sera formé de celles des substitutions de G qui ont également la forme canonique. Soit E le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à F; ses substitutions, devant transformer S en une substitution canonique, seront d'après le N°. 4. de l'une des formes

$$(8.) \qquad |x, \; y \quad \alpha x, \; \delta y|,$$

$$(9.) \qquad |x, \; y \quad \beta y, \; \gamma x|.$$

Celles de ces substitutions qui sont de la forme (8.) ne seront autres que les $\mu\omega$ substitutions de F.

S'il y a des substitutions de la forme (9.), il y en aura évidemment $\mu\omega$, qui s'obtiendront en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les $\mu\omega$ substitutions de F.

L'ordre de E sera donc $k\mu\omega$, k étant égal à 2 où à 1, suivant que G contiendra ou non une substitution de la forme (9.). Par suite, le nombre des faisceaux distincts F, F_1, ... transformés de F par les Ω substitutions de G, sera $\frac{\Omega}{k\mu\omega}$. Chacun d'eux contient d'ailleurs les ω substitutions de g, et $(\mu-1)\omega$ substitutions de première espèce. Le nombre total des substitutions de première espèce contenues dans les faisceaux F, F_1, ... sera donc égal à $\frac{\Omega}{k\mu\omega}(\mu-1)\omega = \Omega\frac{\mu-1}{k\mu}$.

Si la suite F, F' ... contient un faisceau F', autre que F et ses transformés; soit $\mu'\omega$ son ordre, on verra de même que F' et ses transformés contiendront $\Omega\frac{\mu'-1}{k'\mu'}$ substitutions de première espèce, k' étant égal à 1 ou à 2.

Continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé le nombre des faisceaux F, F', ... on voit que le groupe G contient en tout

$$\Omega\left\{\frac{\mu-1}{k\mu}+\frac{\mu'-1}{k'\mu'}+\cdots\right\}$$

substitutions de première espèce. Il en contient d'ailleurs ω de seconde espèce. On aura donc l'égalité

$$\Omega\left\{\frac{\mu-1}{k\mu}+\frac{\mu'-1}{k'\mu'}+\cdots\right\}+\omega = \Omega$$

d'où

$$(10.)\qquad \Omega = \frac{\omega}{1-\frac{\mu-1}{k\mu}-\frac{\mu'-1}{k'\mu'}-\cdots}.$$

10. Il s'agit de discuter cette formule. A cet effet nous remarquerons que Ω étant fini et positif, son dénominateur doit être positif. D'autre part, G contenant le groupe E, d'ordre $k\mu\omega$, on doit avoir $\Omega \geqq k\mu\omega$. On doit même exclure l'hypothèse $\Omega = k\mu\omega$; car si cela avait lieu, G se confondant avec E, appartiendrait au premier ou au second type (N°. 7.).

Cela posé, chacun des termes $\frac{\mu-1}{k\mu}$, $\frac{\mu'-1}{k'\mu'}$, ... étant au moins

égal à $\frac{1}{2}$ (puisque $k \overline{\gtrless} 2, \mu \overline{\gtrless} 2$), il faudra, pour que le dénominateur de Ω soit positif, que leur nombre ne surpasse pas 3. D'où trois cas à discuter.

11. Premier cas: Il n'existe qu'un terme $\frac{\mu-1}{k\mu}$. On aura

$$\Omega = \frac{\omega}{1-\frac{\mu-1}{k\mu}} = \frac{\omega}{1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k\mu}} \overline{\gtrless} \frac{\omega}{\frac{1}{k\mu}} \overline{\gtrless} k\mu\omega$$

ce qui est impossible (No. 10).

12. Deuxième cas. Il existe deux termes $\frac{\mu-1}{k\mu}$ et $\frac{\mu'-1}{k'\mu'}$.

Si $k = k' = 1$, chacun de ces deux termes étant au moins égal à $\frac{1}{2}$, le dénominateur de Ω ne pourra être positif, conséquence absurde.

Si $k = k' = 2$, on aura

$$\Omega = \frac{\omega}{\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{2\mu'}} < 2\mu\omega,$$

conséquence absurde.

Soit enfin $k = 2$, $k' = 1$. On aura

$$\Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{\mu'}}.$$

Si $\mu' > 3$ le dénominateur de Ω ne pourra être positif.

Si $\mu' = 2$, on aura

$$\Omega = \frac{\omega}{\frac{1}{2\mu}} = 2\mu\omega$$

et G appartiendra au second type.

Enfin, si $\mu' = 3$, il viendra

$$\Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2\mu}} = \frac{6\mu\omega}{3-\mu}.$$

Pour que son dénominateur soit positif, il faudra poser $\mu = 2$, d'où

$$\Omega = 12\omega.$$

13. Troisième cas. Il existe trois termes $\frac{\mu-1}{k\mu}$, $\frac{\mu'-1}{k'\mu'}$, $\frac{\mu''-1}{k''\mu''}$.

Si l'un des nombres k, k', k'' était égal à 1, le terme correspondant étant $\overline{\gtrless} \frac{1}{2}$ et les autres $\overline{\gtrless} \frac{1}{4}$, le dénominateur de Ω ne pourrait être positif.

Soit donc $k = k' = k'' = 2$. On aura

$$\Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{2\mu'}+\frac{1}{2\mu''}}.$$

Pour que le dénominateur soit positif, il faudra que l'un au moins des termes $\frac{1}{2\mu}$, $\frac{1}{2\mu'}$, $\frac{1}{2\mu''}$ surpasse $\frac{1}{6}$.

Soit donc $\frac{1}{2\mu''} > \frac{1}{6}$, d'où $\mu'' < 3$. On en déduira

$$\mu'' = 2, \quad \Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{2\mu'}}.$$

L'un au moins des termes $\frac{1}{2\mu}$, $\frac{1}{2\mu'}$, devra surpasser $\frac{1}{8}$. Soit donc $\frac{1}{2\mu'} > \frac{1}{8}$. On en déduira $\mu' < 4$.

Si $\mu' = 2$, il viendra

$$\Omega = \frac{\omega}{\frac{1}{2\mu}} = 2\mu\omega$$

et Ω appartiendra au deuxième type. Il en sera de même si $\mu = 2$.

Soit enfin $\mu' = 3$, avec $\mu > 2$. Il viendra

$$\Omega = \frac{\omega}{-\frac{1}{12}+\frac{1}{2\mu}} = \frac{12\mu\omega}{6-\mu}.$$

On pourra supposer

$$\mu = 3, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 12\omega,$$
$$\mu = 4, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 24\omega,$$
$$\mu = 5, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 60\omega.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème. *Tout groupe G, d'ordre fini, et n'appartenant pas aux deux types déjà étudiés, a pour ordre $r\omega$, r désignant l'un des trois nombres* 12, 24, 60.

14. Le problème étant ainsi nettement circonscrit, procédons à la construction de ces groupes.

Considérons dans ce but la fonction linéaire $z = \frac{mx+ny}{px+qy}$, où m, n, p, q sont des constantes arbitraires. Les ω substitutions de g, multipliant

x et y par un même facteur, n'altéreront pas cette fonction. Le nombre des transformées distinctes z, z_1, ... de la fonction par les $r\omega$ substitutions de G sera donc égal à r.

Chaque substitution de G permutera les unes dans les autres les r fonctions z, z_1, ... Les divers déplacements de ces fonctions opérés par les substitutions de G formeront évidemment un groupe Γ d'ordre r, *isomorphe* à G (c'est-à-dire tel qu'à chaque substitution de G corresponde une seule substitution de Γ et qu'au produit de deux substitutions de G corresponde le produit de leurs correspondantes). Réciproquement, à chaque substitution de Γ correspondront dans G ω substitutions, qui s'obtiendront en multipliant l'une d'elles par les substitutions de g.

15. *Il ne peut exister aucun groupe d'ordre premier, contenu dans Γ et permutable à ses substitutions.* Soit en effet Φ un semblable groupe; il serait formé des puissances d'une seule substitution circulaire Σ. Soit S l'une des substitutions de G qui correspondent à Σ. Le groupe F, formé par celles des substitutions de G qui correspondent à celles de Φ, résultant de la combinaison des puissances de S avec les substitutions de g, ses substitutions seront échangeables entre elles. D'ailleurs les substitutions de Γ étant permutables à Φ, celles de G le seront évidemment à F. Donc G appartiendra au premier ou au second type (N°. 7.), contrairement à notre supposition.

16. Ces préliminaires posés, trois cas seront à discuter, suivant la valeur de r.

Premier cas. Soit d'abord $r = 12$. D'après un théorème de M. *Sylow* (Mathematische Annalen, T. V), r étant divisible par 3 sans l'être par 3^2, le groupe Γ contiendra des groupes Δ, Δ', ... d'ordre 3, en nombre $3\alpha+1$, α étant un entier; ces groupes sont les transformés d'un seul d'entre eux Δ par les substitutions de Γ; et si 3β est l'ordre du groupe formé par celles de ces substitutions qui sont permutables à Δ, on aura

$$(11.) \qquad 12 = 3\beta(3\alpha+1).$$

Cette égalité ne peut avoir lieu que si $\beta = 1$ et $\alpha = 1$. Il y aura donc quatre groupes d'ordre 3, que les substitutions de Γ permuteront ensemble. Les déplacements de ces groupes formeront un groupe transitif G' entre 4 quantités, lequel sera évidemment isomorphe à Γ, et par suite à G.

Soit l le nombre des substitutions de Γ qui correspondent à chaque

substitution de G'; l'ordre de G' sera évidemment $\frac{12}{l}$. D'ailleurs G' étant transitif entre 4 quantités, son ordre est un multiple de 4. Donc $l = 3$ ou 1.

Si l était égal à 3, les substitutions de G' étant permutables au groupe formé par la substitution 1, celles de Γ le seraient au groupe d'ordre 3 formé par ses correspondantes, ce qui est impossible (N°. 15.). On aura donc $l = 1$; donc G' sera d'ordre 12 et par suite ne sera autre que le groupe alterné entre 4 lettres.

17. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ces quatre lettres. Le groupe G' s'obtiendra en combinant au groupe G'_1 dérivé des substitutions binaires

$$A' = (\alpha\beta)(\gamma\delta),$$
$$B' = (\beta\gamma)(\alpha\delta)$$

la substitution ternaire

$$C' = (\alpha\beta\gamma)$$

laquelle transforme A', B' en B', $A'B'$.

Soient A, B, C des substitutions arbitrairement choisies parmi celles de G qui correspondent respectivement à A', B', C'. La substitution

$$(A'B')^{-1}.C'^{-1}.A'B'.C'$$

laquelle se réduit à A', aura pour correspondante

$$(AB)^{-1}.C^{-1}.AB.C = A$$

dont le déterminant, étant le produit des déterminants de ses composantes (qui sont réciproques les unes des autres), se réduit à l'unité.

De même, à la substitution

$$C'^{-1}A'C' = B'$$

correspondra la substitution

$$C^{-1}AC = B$$

de déterminant 1. D'où ce résultat:

Le groupe G contient des substitutions A et B de déterminant 1 *et respectivement correspondantes à A' et B'.*

18. Construisons ces substitutions.

Supposons les variables choisies de manière à ramener A à sa forme canonique

$$|x, y \quad ax, by|.$$

On aura $ab = 1$.

D'autre part, A' ne se réduisant pas à l'unité, mais son carré s'y réduisant, A^2 multipliera x et y par un même facteur sans que A jouisse de cette propriété. On aura donc

$$a \gtrless b, \quad a^2 = b^2$$

d'où

$$a^4 = a^2 b^2 = 1, \quad a = -b = i.$$

$$(12.) \qquad A = |x, \ y \quad ix, \ -iy|.$$

19. Passons à la substitution B. Puisque B' est échangeable à A', B transformera A en mA, m désignant une substitution qui multiplie x et y par un même facteur m. Mais A ayant l'unité pour déterminant, le déterminant de la transformée, qui est m^2, doit aussi se réduire à l'unité. Donc $m = \pm 1$.

Si m était égal à l'unité, B serait de la forme

$$|x, \ y \quad ax, \ by|$$

(N°. 4.) et B' étant d'ordre 2, on trouverait comme tout à l'heure

$$a = -b = \pm i$$

et par suite

$$B = \pm A.$$

Les deux substitutions A et B ne différant que par un facteur constant ± 1, leurs correspondantes A' et B' devraient être identiques, ce qui n'est pas.

On aura donc $m = -1$, et B sera de la forme (N°. 4.)

$$|x, \ y \quad ay, \ bx|,$$

On peut d'ailleurs supposer $a = 1$, car rien n'empêche de prendre pour variable ay au lieu de y. Cela posé, pour que B ait l'unité pour déterminant, il faudra qu'on ait $b = -1$, et par suite

$$(13.) \qquad B = |x, \ y \quad y, \ -x|.$$

20. Soit maintenant C une des substitutions de G correspondantes à C'. Des égalités

$$C'^{-1}A'C' = B', \quad C'^{-1}B'C' = A'B'$$

on déduira

$$\mathrm{C}^{-1}A\mathrm{C} = mB, \quad \mathrm{C}^{-1}B\mathrm{C} = nAB,$$

m et n étant des substitutions qui multiplient x et y par un même facteur constant m ou n. Ces facteurs doivent être égaux à ± 1 pour que les transformées aient encore pour déterminant l'unité.

Soit donc $m=(-1)^\beta$, $n=(-1)^\alpha$. On aura $C=A^\alpha B^\beta C$, C étant une nouvelle substitution appartenant également à G, et transformant A et B en B et AB.

Soit

$$C=\left|\begin{matrix} x & \lambda x+\mu y \\ y & \nu x+\varrho y \end{matrix}\right|.$$

On aura

$$(14.)\qquad AC=CB,\quad BC=CAB.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} AC &= |x,\ y\quad \lambda i x-\mu i y,\ \ \nu i x-\varrho i y|, \\ CB &= |x,\ y\quad \nu x+\varrho y,\ \ -\lambda x-\mu y|, \\ BC &= |x,\ y\quad \lambda y-\mu x,\ \ \nu y-\varrho x|, \\ CAB &= |x,\ y\quad -i(\nu x+\varrho y),\ \ -i(\lambda x+\mu y)|. \end{aligned}$$

Les identités (14.) donneront donc

$$\nu=\lambda i,\quad \varrho=-\mu i,\quad \nu i=-\lambda,\quad \mu=\varrho i,$$
$$\mu=\nu i,\quad \lambda=-\varrho i,\quad \varrho=\lambda i,\quad \nu=-\mu i$$

d'où

$$\mu=-\lambda,\quad \nu=\lambda i,\quad \varrho=\lambda i$$

et par suite, en posant $\lambda=m\frac{1-i}{2}$,

$$(15.)\qquad C=\left|\begin{matrix} x & m\frac{1-i}{2}(x-y) \\ y & m\frac{1+i}{2}(x+y) \end{matrix}\right|,$$

substitution qui aura m^2 pour déterminant.

Le groupe cherché G sera dérivé des substitutions A, B, C, jointes à des substitutions de seconde espèce, m', m'', ...

21. Il est aisé de voir que l'ordre du groupe ainsi construit est bien 12ω. En effet, chacune de ses substitutions transforme circulairement les unes dans les autres les trois substitutions A, B, AB, ou les transforme chacune en elle-même (au facteur près ± 1). Son ordre est donc égal à $3\Omega'$, Ω' étant l'ordre du groupe formé par celles de ses substitutions qui transforment A, B, AB en elles-mêmes (au facteur près ± 1). Celles-ci sont évidemment de la forme $A^\alpha B^\beta T$, α et β étant égaux à 0 ou à 1, et T étant l'une des substitutions échangeables à la fois à A et à B. On

aura donc $\Omega' = 4\Omega''$, Ω'' étant le nombre des substitutions T. Celles-ci étant échangeables à A, seront de la forme

$$|x,\ y \quad ax,\ by|$$

et l'on vérifie immédiatement que pour qu'elles soient échangeables à B, il faudra qu'on ait $a = b$. Les T se réduisent donc aux ω substitutions de seconde espèce que G contient.

On remarquera que pour que G ne contienne qu'un nombre limité de substitutions, il est nécessaire que m soit une racine de l'unité.

22. Deuxième cas. Soit $r = 24$. Le groupe Γ contiendra $3\alpha+1$ groupes d'ordre 3 (Théorème de *Sylow*), et l'équation

$$24 = 3\beta(3\alpha+1)$$

montre que l'on aura $\beta = 2$, $\alpha = 1$. Il existera un groupe G' entre 4 lettres et isomorphe à Γ (Voir le N°. 16 pour les détails).

Son ordre sera $\frac{24}{l}$, et comme il est un multiple de 4, l sera un diviseur de 6. Il ne pourra être un nombre premier 2 ou 3 (Voir le N°. 16). D'autre part, s'il était égal à 6, Γ contiendrait un groupe Γ_1 d'ordre 6 et permutable à toutes ses substitutions. Ce groupe Γ_1 contient d'ailleurs un groupe Γ_2 d'ordre 3, lequel est unique (Théorème de *Sylow*). Les substitutions de Γ étant permutables à Γ_1, le seraient à Γ_2, ce qui est impossible (N°. 15).

On aura donc $l = 1$, et le groupe G', d'ordre 24, contiendra toutes les substitutions possibles entre 4 lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, entre autres les substitutions

$$A' = (\alpha\beta)(\gamma\delta),\quad B' = (\beta\gamma)(\alpha\delta),\quad C' = (\alpha\beta\gamma).$$

Celles des substitutions de G qui correspondent à ces substitutions, formeront un groupe, dérivé des substitutions A, B, C jointes à des substitutions de seconde espèce (N°s. 18 à 20).

23. On obtient le groupe G' en combinant aux substitutions précédentes A', B', C' la substitution

$$D' = (\alpha\gamma\beta\delta)$$

laquelle transforme A' et B' en A' et $A'B'$.

Soit $\mathfrak{D}$ une des substitutions qui lui correspondent dans G. Elle transformera A, B en $\pm A$, $\pm AB$, et par suite sera de la forme $A^\alpha B^\beta D$, D étant une nouvelle substitution échangeable à A et qui transforme B en AB.

Pour que D soit échangeable à A, il faut qu'elle soit de la forme

$$|x,\ y \quad ax,\ by|.$$

On doit avoir en outre

$$BD = DAB.$$

Mais on a

$$BD = |x,\ y \quad ay,\ \ -bx|,$$
$$DAB = |x,\ y \quad -biy,\ \ -aix|.$$

On devra donc avoir $b = ai$, et si nous posons $a = nj$, j étant une racine huitième de l'unité, il viendra

$$(16.)\qquad D = |x,\ y \quad njx,\ \ nj^{-1}y|.$$

24. On vérifiera, comme au N°. 21, que le groupe G dérivé des substitutions A, B, C, D, jointes à des substitutions de seconde espèce m', m'', ... a bien pour ordre 24ω.

25. On peut d'ailleurs sans inconvénient supposer $m = 1$ dans l'expression (15.) de la substitution C. En effet, cette substitution, dont la troisième puissance se réduit à la seconde espèce, correspondra dans G' à l'une des quatre substitutions circulaires ternaires C', $A'^{-1}C'A'$, $B'^{-1}C'B'$, $(A'B')^{-1}C'A'B'$ qui transforment A' et B' en B' et $A'B'$. Supposons pour fixer les idées qu'elle corresponde à C'. Le groupe G' contient la substitution

$$S' = (\alpha\beta).$$

Soit S l'une de ses correspondantes. A la substitution

$$C'^{-1}S'^{-1}C'S' = C'$$

correspondra la substitution de déterminant 1, $C^{-1}S^{-1}CS = C_1$. Mais C est une autre correspondante. Donc C_1 ne différera de C que par la valeur du facteur constant m, lequel devra s'y réduire à ± 1. D'ailleurs G contenant la substitution $A^2 = -1$, contiendra à la fois la substitution C_1 et la substitution $-C_1$. Il est donc permis de supposer $m = +1$.

26. Troisième cas. Soit $r = 60$. On verra comme dans les deux cas précédents 1°. que Γ contient $5\alpha+1$ groupes d'ordre 5; 2°. que $\alpha = 1$ (en vertu de l'équation $60 = 5\beta(5\alpha+1)$); 3°. que Γ est isomorphe à un groupe entre 6 lettres et d'ordre 60.

Mais on sait qu'il n'existe qu'un groupe d'ordre 60 entre 6 lettres, lequel est isomorphe au groupe alterné entre 5 lettres. Donc G sera isomorphe à un groupe alterné G' entre 5 lettres.

Soient S' et T' deux substitutions de G', non échangeables entre elles; S et T des substitutions correspondantes arbitrairement choisies dans G. La substitution

$$S'^{-1}T'^{-1}S'T' = U'$$

aura parmi ses correspondantes la substitution $S^{-1}T^{-1}ST = U$ de déterminant 1.

Soient maintenant $V', W', \ldots$ les diverses substitutions de G'; $V, W, \ldots$ des substitutions arbitrairement choisies parmi leurs correspondantes. Les substitutions

$$(17.)\qquad U',\ V'^{-1}U'V',\quad W'^{-1}U'W',\ \ldots$$

transformées de U', auront parmi leurs correspondantes les substitutions

$$U,\quad V^{-1}UV,\quad W^{-1}UW,\ \ldots$$

de déterminant 1. On sait d'ailleurs que toute substitution de G' résulte de la combinaison des substitutions (17.). Donc chaque substitution de G' aura parmi ses correspondantes au moins une substitution de déterminant 1.

Ces substitutions de déterminant 1 formeront un groupe G_1 contenu dans G; et ce dernier groupe résultera évidemment de la combinaison de G_1 avec des substitutions de seconde espèce.

Tout se réduit donc à former le groupe G_1.

27. Le groupe G' est dérivé des substitutions

$$A' = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon),$$
$$B' = (\beta\varepsilon)(\gamma\delta),$$
$$C' = (\beta\delta)(\gamma\varepsilon).$$

Cherchons à construire leurs correspondantes dans G_1.

Supposons A ramené à la forme canonique

$$A = |x,\ y\quad ax,\ by|.$$

On aura $ab = 1$.

D'autre part, A'^5 se réduisant à l'unité, on aura $a^5 = b^5$, d'où $a^{10} = 1$. Donc $a = \theta$, $b = \theta^{-1}$, θ étant une racine primitive de l'une des deux équations

$$\theta^5 = 1,\quad \theta^5 = -1.$$

On aura par suite

$$(18.)\qquad A = |x,\ y\quad \theta x,\ \theta^{-1}y|.$$

28. En second lieu, B' transformant A' en A'^{-1}, sa correspondante

B transformera A en

$$mA^{-1} = |x, \; y \quad m\theta^{-1}x, \; m\theta y|.$$

Pour qu'une telle transformation soit possible, il faut (N°. 4) qu'on ait

$$\theta = m\theta^{-1}, \quad m\theta = \theta^{-1},$$

ou

$$\theta^{-1} = m\theta^{-1}, \quad \theta = m\theta.$$

Le premier système d'équations donnerait $\theta^4 = 1$, ce qui est absurde.

Le second donnera $m = 1$.

La substitution B sera de la forme

$$|x, \; y \quad \alpha y, \; \delta x|$$

(N°. 4). On peut supposer $\alpha = 1$, et comme B a 1 pour déterminant, on en déduira $\delta = -1$, d'où

$$(19.) \qquad B = |x, \; y \quad y, \; -x|.$$

29. Avant d'aller plus loin, remarquons qu'on peut supposer $\theta^5 = -1$. En effet, G contenant A et B, contiendra la substitution

$$AB^2 = |x, \; y \quad -\theta x, \; -\theta^{-1}y|$$

qui correspond à A', ainsi que A, dont elle ne diffère que par le signe de θ; d'ailleurs si l'on avait $\theta^5 = 1$, on aurait $(-\theta)^5 = -1$.

30. Soit enfin

$$C = |x, \; y \quad \lambda x + \mu y, \; \nu x + \varrho y|$$

une substitution correspondante à C'. Soient x', y' les variables indépendantes qui la ramèneraient à sa forme canonique

$$C = |x', \; y' \quad ax', \; by'|.$$

On aura $ab = 1$.

D'autre part, C'^2 se réduisant à l'unité (sans que C' s'y réduise), C ne sera pas de seconde espèce, mais C^2 en sera. On aura donc

$$a \gtrless b, \quad a^2 = b^2,$$

d'où

$$a = -b = \pm i$$

et enfin

$$a + b = 0.$$

Mais a et b étant les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \lambda - s & \mu \\ \nu & \varrho - s \end{vmatrix} = 0$$

leur somme est $\lambda+\varrho$. On aura donc

$$(20.)\quad \lambda+\varrho = 0.$$

En second lieu, la substitution

$$BC = |x,\ y\quad -\mu x+\lambda y,\ -\varrho x+\nu y|$$

a pour correspondante $B'C'$ dont le carré est égal à l'unité. On aura donc comme tout à l'heure

$$(21.)\quad -\mu+\nu = 0.$$

En troisième lieu, considérons la substitution

$$A^2C = |x,\ y\quad \lambda\theta^2x+\mu\theta^{-2}y,\ \nu\theta^2x+\varrho\theta^{-2}y|.$$

Soit

$$|x'',\ y''\quad ax'',\ by''|$$

sa forme canonique. On aura encore $ab=1$. D'autre part, sa correspondante

$$A'^2C' = (\alpha\varepsilon\delta)$$

étant d'ordre 3, on aura

$$a\gtrless b,\quad a^3 = b^3,$$

d'où $a^3=\pm 1$.

Il est permis de supposer $a^3=-1$. Car à la substitution C' correspond outre la substitution C, la substitution $B^2C=-C$ qu'on pourrait considérer s'il le fallait à la place de C.

Donc a et b seront les racines de l'équation

$$0=\frac{a^3+1}{a+1}=a^2-a+1$$

et auront pour somme l'unité.

Cela donnera l'équation

$$(22.)\quad \lambda\theta^2+\varrho\theta^{-2} = 1.$$

Enfin, C ayant l'unité pour déterminant, on aura

$$(23.)\quad \lambda\varrho-\mu\nu = 1.$$

31. On déduit des équations (20.), (21.), (22.), (23.)

$$(24.)\quad \lambda=-\varrho=\frac{1}{\theta^2-\theta^{-2}},$$

$$(25.)\quad \mu = \nu$$

et enfin

$$(26.)\quad \lambda^2+\mu^2+1 = 0.$$

Cette dernière équation donne pour μ deux valeurs égales et contraires. Il semble donc qu'on puisse construire de deux manières différentes le groupe G_1. Mais on voit immédiatement que les deux groupes ainsi obtenus sont transformés l'un dans l'autre par la substitution

$$|x,\ y \quad x,\ -y|.$$

Ils ne diffèrent donc que par la notation.

32. Il reste à prouver que le groupe G dérivé des substitutions $A,\ B,\ C$ jointes à des substitutions $m,\ m',\ \ldots$ de seconde espèce, a bien pour ordre 60ω.

Remarquons à cet effet que les six fonctions

$$(27.) \qquad \varphi = xy, \quad \varphi_\alpha = (\lambda\theta^\alpha x + \mu\theta^{-\alpha} y)(\mu\theta^\alpha x - \lambda\theta^{-\alpha} y) \qquad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

sont permutées entre elles, à des facteurs constants près, et d'une manière deux fois transitive, par les substitutions de G.

En effet, les substitutions $m,\ m',\ \ldots$ les multiplient par des facteurs constants, et l'on vérifie sans peine que A les transforme respectivement en $\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \varphi_0$; que B les transforme en $-\varphi,\ -\varphi_0,\ -\varphi_4,\ -\varphi_3,\ -\varphi_2,\ -\varphi_1$; enfin que C les transforme, à des facteurs constants près, en $\varphi_0,\ \varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_3,\ \varphi_2,\ \varphi_4$.

L'ordre de G sera donc égal à $6.5\Omega'$, Ω' étant l'ordre du groupe H formé par celles de ces substitutions qui multiplient φ et φ_0 par un simple facteur constant.

Or les substitutions de H, multipliant φ par un facteur constant, seront de l'une des deux formes

$$(28.) \qquad |x,\ y \quad ax,\ by|,$$

$$(29.) \qquad |x,\ y \quad ay,\ bx|.$$

Parmi elles, se trouve la substitution B, qui appartient à la seconde forme; et l'on aura évidemment $\Omega' = 2\Omega''$, Ω'' étant le nombre des substitutions de H qui sont de la forme (28.).

Or une substitution de cette forme transforme φ_0 en

$$(\lambda ax + \mu by)(\mu ax - \lambda by)$$

qui sera égale à φ_0 à un facteur constant près, si l'on a

$$\frac{\lambda\mu a^2}{\lambda\mu} = \frac{(\mu^2-\lambda^2)ab}{\mu^2-\lambda^2} = \frac{-\lambda\mu b^2}{-\lambda\mu}.$$

Mais $\lambda,\ \mu,\ \mu^2-\lambda^2$ sont $\gtrless 0$. Ces équations se réduisent donc à

$$a^2 = ab = b^2,$$

d'où $a = b$.

Les substitutions cherchées sont donc de seconde espèce, et leur nombre Ω' sera égal à ω.

33. Nous pouvons donc formuler le théorème suivant:

Théorème. *Les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à deux variables peuvent se ramener à cinq types.*

Premier type. *Ses substitutions sont de la forme*

$$(30.)\quad |x,\ y \quad ax,\ by|.$$

Deuxième type. *Il s'obtient en adjoignant aux substitutions précédentes une substitution de la forme*

$$(31.)\quad |x,\ y \quad cy,\ dx|.$$

Troisième type. *Il est dérivé de substitutions de la forme*

$$(32.)\quad a = |x,\ y \quad ax,\ ay|$$

jointes aux substitutions

$$(33.)\quad A = |x,\ y \quad ix,\ -iy|,\quad (i^4 = 1)$$

$$(34.)\quad B = |x,\ y \quad y,\ -x|,$$

$$(35.)\quad mC = \left|x,\ y \quad m\frac{1-i}{2}(x-y),\ \ m\frac{1+i}{2}(x+y)\right|.$$

Quatrième type. *Il résulte des substitutions a, A, B, C jointes à une substitution de la forme*

$$(36.)\quad nD = |x,\ y \quad njx,\ nj^{-1}y|,\quad (j^8 = 1).$$

Cinquième type. *Il est dérivé de substitutions de la forme*

$$(37.)\quad |x,\ y \quad ax,\ ay|$$

jointes aux substitutions

$$(38.)\quad |x,\ y \quad \theta x,\ \theta^{-1}y|,\quad (\theta^{10} = 1)$$

$$(39).\quad |x,\ y \quad y,\ -x|,\quad \left(\lambda = \frac{1}{\theta^2-\theta^{-2}}\right)$$

$$(40.)\quad |x,\ y \quad \lambda x+\mu y,\ \mu x-\lambda y|,\quad (\mu^2+\lambda^2+1=0).$$

On peut donner à ces trois derniers types le nom de types *tétraédrique, octaédrique, icosaédrique.* Ils sont en effet respectivement isomorphes aux groupes formés par les mouvements qui superposent à eux-mêmes ces trois polyèdres réguliers.

34. On pourra donc avoir cinq types d'équations linéaires du second ordre à intégrales algébriques. Ces intégrales donnent lieu aux remarques suivantes:

Premier type. Les quantités a, étant des racines de l'unité, seront les puissances de l'une d'entre elles, racine primitive d'une certaine équation binôme $X^\alpha = 1$. De même les b seront les puissances d'une racine primitive d'une équation binôme $Y^\beta = 1$. Cela posé, les quantités x^α, y^β ne seront altérées par aucune des substitutions du groupe; ce seront donc des fonctions monodromes de la variable t. Les deux intégrales particulières x, y seront donc des racines d'équations binômes

$$x^\alpha = \psi(t), \quad y^\beta = \psi_1(t)$$

où ψ, ψ_1 sont des fonctions monodromes.

Deuxième type. La substitution

$$|x, y \quad cy, dx|$$

transformant

$$|x, y \quad ax, by|$$

en

$$|x, y \quad bx, ay|$$

la série des coefficients a sera identique à celle des coefficients b. On aura donc $\beta = \alpha$. Toute fonction rationnelle de x^α, y^α, étant invariable par la moitié des substitutions de G, n'aura que deux valeurs distinctes. Donc x^α, y^α seront racines d'une équation du second degré, à coefficients monodromes en t.

Troisième type. Les a sont les puissances d'une racine primitive d'une équation binôme $X^\alpha = 1$. Soit z une intégrale quelconque de l'équation: z^α étant invariable par les ω substitutions a, dépendra d'une équation d'ordre 12, équivalente à une équation du 4ᵉ degré, à discriminant carré. Donc z^α s'exprimera rationnellement au moyen des racines de cette équation du 4ᵉ degré. Soit d'ailleurs u une autre intégrale quelconque; u^α, étant invariable par les mêmes substitutions que z^α, sera une fonction rationnelle de z^α et de t.

Quatrième type. Mêmes conclusions, sauf que la réduite du 4ᵉ degré n'aura pas son discriminant carré.

Cinquième type. La réduite sera du 5ᵉ degré, à discriminant carré.

Chapitre II. Equations d'ordre p.

35. Passons aux équations linéaires d'ordre p. Nous aurons à construire les groupes H d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire d'ordre p.

36. On verra tout d'abord, comme au N°. 2, que chaque substitution d'un pareil groupe aura pour forme canonique

$$|x, y, z, \ldots \quad ax, by, cz, \ldots|$$

les coefficients $a, b, c, \dots$ étant des racines de l'unité, et pouvant être égaux ou non.

37. Soit en second lieu

$$S = |x, y, z, u, v, \dots \quad ax, ay, cz, cu, ev, \dots|$$

une substitution réduite à sa forme canonique par un choix de variables approprié, et dans laquelle les coefficients égaux soient mis en évidence. On vérifiera aisément que pour qu'une substitution linéaire soit échangeable à S, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$T = |x, y, z, u, v, \dots \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z+\delta u, \gamma' z+\delta' u, \varepsilon v, \dots|.$$

Plus généralement, pour qu'une substitution linéaire transforme S en une substitution canonique S', il faut et il suffit qu'elle soit le produit d'une substitution de la forme T par une autre substitution U qui permute ensemble les systèmes de variables, tels que x, y; z, u; etc. que S multiplie par un même facteur.

Il résulte évidemment de là que si m désigne le nombre des substitutions linéaires de la forme T que contient un groupe H, et n l'ordre du groupe K formé par celles des substitutions de H qui transforment les unes dans les autres les substitutions canoniques telles que S, on aura $n = km$, k désignant le nombre des déplacements différents que les substitutions de K font subir aux systèmes de variables x, y; z, u; ... Ce nombre k est évidemment un diviseur de $1.2 \dots p$.

38. Soient

$$S' = |x, y, z, u, v, \dots \quad a'x, a'y, c'z, c'u, e'v, \dots|,$$
$$S'' = |x, y, z, u, v, \dots \quad a''x, a''y, c''z, c''u, e''v, \dots|$$
etc.

celles des substitutions de H qui ont la même forme que S, et ne diffèrent les unes des autres que par les valeurs (égales ou inégales) attribuées aux coefficients $a, c, e, \dots$ Nous dirons que ces substitutions forment un *faisceau*, si chacune des séries de rapports

$$\frac{c'}{a'}, \frac{c''}{a''}, \dots$$
$$\frac{e'}{a'}, \frac{e''}{a''}, \dots$$
$$\frac{e'}{c'}, \frac{e''}{c''}, \dots$$
$$\dots\dots$$

contient un nombre illimité de termes numériquement distincts.

Il importe pour l'étude qui va suivre de bien préciser le sens que nous attachons aux mots *limité* et *illimité*. Ils ne sont pas synonymes de *fini* et *infini*. Nous dirons qu'un nombre est limité, lorsqu'il est inférieur à une limite *déterminée*. Il résulte de cette définition qu'un nombre fini, sur lequel on n'a aucune donnée, est illimité; mais il devient limité dès qu'on parvient à assigner sa limite.

39. Si le groupe G formé des substitutions S', S'', ... n'est pas un faisceau, c'est que l'un des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{e}{a}$, $\frac{e}{c}$, ..., par exemple $\frac{c}{a}$, n'y prend qu'un nombre limité l de valeurs distinctes. Dans ce cas, celles des substitutions de G dans lesquelles $a = c$ forment un groupe G_1, dont l'ordre est l fois moindre que celui de G, et dont les substitutions seront de la forme

$$|x, y, z, u, v, \dots \quad ax, ay, az, au, ev, \dots|.$$

Si G_1 n'est pas un faisceau, l'un des rapports $\frac{e}{a}$, ..., par exemple $\frac{e}{a}$, n'y prendra qu'un nombre limité l_1 de valeurs; et celles des substitutions de G_1 pour lesquelles $e = a$, formeront un nouveau groupe G_2, d'ordre l_1 fois moindre.

Poursuivant ainsi, on arrivera nécessairement à un dernier groupe F qui sera un faisceau, ou au groupe Φ formé par celles des substitutions de H qui multiplient toutes les variables par un même facteur.

Ce groupe Φ, que nous pourrons appeler le *faisceau singulier*, existe toujours; mais il peut se réduire à la substitution unité. Il est évidemment contenu dans tous les autres faisceaux que H peut renfermer. Ses substitutions gardent la forme canonique quel que soit le choix des variables, et sont échangeables à toute substitution linéaire.

40. Cela posé, nous allons établir le théorème fondamental suivant:

Théorème. *Tous les faisceaux que H peut contenir, sont contenus dans un seul d'entre eux F_0, lequel est permutable aux substitutions de H.*

L'ordre de H est égal au produit de l'ordre de F_0 par un entier limité λ.

Le théorème est évident pour une seule variable. Nous allons le démontrer pour p variables, en admettant qu'il soit établi pour moins de p variables.

41. Cette extension n'offre aucune difficulté, dans le cas particulier où l'on peut répartir les variables en plusieurs catégories, telles que chaque substitution de H remplace les variables de chaque catégorie par des fonctions linéaires de ces mêmes variables.

Supposons, par exemple, que les substitutions de H soient de la forme

$$|x, y, z, u, \ldots \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z+\delta u+\cdots, \gamma' z+\delta' u+\cdots, \ldots|.$$

A chacune de ces substitutions, faisons correspondre la substitution à deux variables

$$|x, y \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y|.$$

Ces dernières substitutions formeront un groupe H', isomorphe à H. Soit maintenant F un faisceau contenu dans H. Ses correspondantes formeront évidemment un faisceau F' contenu dans H'. Mais le théorème est vrai, par hypothèse, pour le groupe H', où il y a moins de p variables. Les faisceaux qu'il contient, et en particulier le faisceau F', seront donc tous contenus dans un seul d'entre eux $\mathfrak{F}'$, dont les substitutions pourront se mettre sous la forme canonique

$$|x, y \quad ax, by|$$

par un choix convenable de variables. De plus, les substitutions de H' seront permutables à celles de $\mathfrak{F}'$, et en nombre $\lambda' f'$, λ' étant un nombre limité, et f' étant l'ordre de $\mathfrak{F}'$.

Soit de même H'' le groupe isomorphe à H et formé des substitutions

$$|z, u, \ldots \quad \gamma z+\delta u+\cdots, \gamma' z+\delta' u+\cdots, \ldots|.$$

Tous les faisceaux que contient H'', et en particulier le faisceau F'' formé par les substitutions correspondantes à celles de F, seront contenus dans un faisceau unique $\mathfrak{F}''$, dont on pourra mettre les substitutions sous la forme canonique

$$|z, u, \ldots \quad cz, du, \ldots|.$$

Enfin les substitutions de H'' seront permutables à $\mathfrak{F}''$, et en nombre $\lambda'' f''$, où λ'' est un entier limité, et f'' l'ordre de $\mathfrak{F}''$.

Il résulte évidemment de là:

1°. Que les substitutions de H sont permutables au groupe G formé par celles de ses substitutions qui sont de la forme

$$|x, y, z, u, \ldots \quad ax, by, cz, du, \ldots|.$$

2°. Que leur nombre h est au plus égal à $\lambda' \lambda'' g$, g désignant l'ordre de G.

3°. Que F est contenu dans G.

Si G est un faisceau, le théorème est démontré.

42. Si G n'est pas un faisceau, on pourra en déduire, par le procédé du N°. 39 un faisceau $\mathfrak{F}$, lequel jouira de la triple propriété qui a été reconnue au groupe G.

En effet le procédé par lequel on passe du groupe G au faisceau réduit $\mathfrak{F}$ ne présentant évidemment aucune ambiguïté quant au résultat final, les substitutions de H, permutables à G, le seront nécessairement à $\mathfrak{F}$.

En second lieu, l'ordre f du faisceau $\mathfrak{F}$ étant égal à $\frac{g}{ll_1\ldots}$ où l, $l_1, \ldots$ sont limités, h sera égal au produit de f par un entier limité $\gtreqless \lambda'\lambda'' ll_1\ldots$

Enfin $\mathfrak{F}$ contient F. Soit en effet pour fixer les idées

$$(41.)\qquad |x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots\quad ax,\ ay,\ cz,\ cu,\ \ldots|$$

la forme générale des substitutions de $\mathfrak{F}$.

Chacun des rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{d}$ ne peut prendre plus de $ll_1\ldots$ valeurs distinctes dans les substitutions de G et *à fortiori* dans celles de F; car si cela avait lieu, g serait $> f.ll_1\ldots$ D'ailleurs F étant un faisceau, ceux des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{c}{b}$, ... qui ne sont pas égaux à l'unité dans toutes ses substitutions doivent y prendre un nombre illimité de valeurs distinctes. Donc $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{d}$ doivent s'y réduire à l'unité; donc F aura ses substitutions de la forme (41.), et sera contenu dans $\mathfrak{F}$.

43. Abordons maintenant le cas général.

Lemme I. *Ceux des faisceaux contenus dans H dont les substitutions sont échangeables à une substitution donnée S (autre que celles de Φ) sont contenus dans un seul d'entre eux F. En outre les substitutions de H qui sont échangeables à S seront en nombre λf, f étant l'ordre de F, et λ un entier limité.*

Soit par exemple

$$S = |x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots\quad ax,\ ay,\ cz,\ cu,\ \ldots|.$$

Soit I le groupe formé par celles des substitutions de H qui sont échangeables à S. Ses substitutions auront la forme

$$|x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z+\delta u,\ \gamma' z+\delta' u,\ \ldots|$$

(N°. 37). Les faisceaux F_1, F_2, ... contenus dans H et dont les substitutions sont échangeables à S seront contenus dans I. Le théorème étant démontré pour ce dernier groupe (N°s 41—42), ces faisceaux seront contenus dans un seul d'entre eux F; et l'ordre de I sera égal à λf.

Nous dirons que la substitution S est ***afférente*** au faisceau F.

44. Soient maintenant $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, ... ceux des faisceaux de H qui sont ***généraux***, c'est-à-dire ne sont contenus dans aucun autre.

Lemme II. ***Un faisceau quelconque F (autre que Φ) ne sera contenu que dans un seul des faisceaux $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, ...***

Supposons en effet que F fût contenu dans $\mathfrak{F}$ et dans $\mathfrak{F}_1$. Les substitutions d'un même faisceau étant échangeables entre elles, l'une quelconque S des substitutions de F sera échangeable à la fois à celles de $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{F}_1$. Si S est choisie de manière à ne pas appartenir à Φ, on en conclut (Lemme I) que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ sont contenus dans un même faisceau. Ils ne pourront donc être tous deux généraux que s'ils se confondent.

Les divers faisceaux F, F_1, ... (autres que Φ) que H contient pourront donc être distribués en ***classes***, en associant ceux qui sont contenus dans un même faisceau général.

Corollaire. ***Tout faisceau F_1 qui contient le faisceau F appartiendra à la même classe que lui.***

En effet si F était contenu dans $\mathfrak{F}$ et F_1 dans $\mathfrak{F}_1$, F serait contenu dans $\mathfrak{F}$ et dans $\mathfrak{F}_1$, ce qui est absurde.

45. Lemme III. ***Chaque classe ne contient qu'un nombre limité de faisceaux.***

Soit en effet $\mathfrak{F}$ un faisceau général, dont les substitutions seront, par exemple, de la forme

$$|x, y, z, u, v, \dots \quad ax, ay, cz, cu, ev, \dots|.$$

Les divers faisceaux contenus dans $\mathfrak{F}$ s'obtiendront évidemment par le procédé suivant:

On prendra, parmi les substitutions de $\mathfrak{F}$, celles où les coefficients $a, c, e, \dots$ satisfont à certaines relations d'égalité. Celles où $a = c$, par exemple, seront de la forme

$$|x, y, z, u, v, \dots \quad ax, ay, az, au, ev, \dots|$$

et formeront un groupe G. Si les rapports des coefficients restants $a, e, \dots$ y prennent un nombre illimité de valeurs, G sera un faisceau. Dans le cas contraire, on en déduira un faisceau par le procédé du N°. 39.

Le nombre des systèmes d'égalités que l'on peut établir entre les coefficients $a, c, e, \dots$, dont le nombre $\overline{\gtrless} p$, étant évidemment limité, et chacun d'eux ne fournissant qu'un faisceau, le nombre des faisceaux ainsi obtenus (et qui d'ailleurs ne sont pas nécessairement distincts) sera limité.

46. Lemme IV. ***Celles des substitutions de H qui sont échangeables à celles d'un faisceau F (autre que Φ) sont en nombre λf, f désignant l'ordre du faisceau général $\mathfrak{F}$ qui contient F, et λ un entier limité.***

En effet, soit par exemple

$$|x, y, z, u, \ldots \quad ax, ay, cz, du, \ldots|$$

la forme générale des substitutions de F. Les substitutions de H qui leur sont échangeables forment un groupe I et sont de la forme

$$|x, y, z, u, \ldots \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z, \delta u, \ldots|.$$

Le faisceau $\mathfrak{F}$, ayant ses substitutions échangeables à celles de F, sera contenu dans I. Mais le théorème étant établi pour ce dernier groupe, les faisceaux qu'il contient seront contenus dans un seul d'entre eux, qui se confondra avec $\mathfrak{F}$, ce dernier faisceau étant général, par hypothèse. De plus, l'ordre de I sera égal à λf.

47. Corollaire. ***Le groupe M formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F a pour ordre μf, μ étant un entier limité.***

En effet, les fonctions linéaires des variables que toutes les substitutions de F multiplient par un facteur constant sont: 1°. les fonctions linéaires de x, y; 2°. les fonctions linéaires de z, u; etc. Toute substitution permutable à F doit donc remplacer les uns par les autres ces divers systèmes de fonctions. Les déplacements opérés entre ces systèmes de fonctions, en nombre $\overline{\gtrless} p$, forment un groupe, isomorphe à M, et dont l'ordre l sera un diviseur de $1.2\ldots p$. L'ordre de M sera évidemment égal au produit de l par l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de M qui remplacent x, y par des fonctions de x, y; u, v par des fonctions de u, v; etc. Ces dernières sont précisément les λf substitutions échangeables à F. Donc M aura pour ordre $l\lambda f = \mu f$, μ étant un entier limité.

48. Lemme V. ***Celles des substitutions de G qui sont afférentes au faisceau F sont en nombre νf, ν étant un entier limité.***

Soient en effet $F_1, F_2, \ldots$ ceux des faisceaux de G qui contiennent F, lesquels seront contenus dans $\mathfrak{F}$, et en nombre limité (Nos. 44 et 45). Soient respectivement $N, N_1, N_2, \ldots$ les nombres de substitutions afférentes aux faisceaux $F, F_1, F_2, \ldots$ On aura

$$(42.) \qquad N+N_1+N_2+\cdots = \mu f.$$

Car il est clair que toute substitution échangeable à celles de F est afférente à ce faisceau ou à l'un de ceux qui le contiennent, et réciproquement.

Cette égalité montre que N sera de la forme νf, si N_1, N_2, ... sont eux-mêmes de cette forme. La proposition étant ainsi démontrée pour un faisceau quelconque F, si elle l'est pour les faisceaux qui le contiennent, il suffira de l'établir pour le faisceau $\mathfrak{F}$ qui contient tous les autres faisceaux de la classe. Mais pour ce faisceau, la proposition est évidente, l'équation (42.) se réduisant à

$$N = \mu f.$$

49. Procédons maintenant à la démonstration du théorème. Soit h le nombre des substitutions de H; nous allons les énumérer de manière à obtenir une équation d'où nous déduirons le résultat désiré.

1°. Nous aurons en premier lieu les substitutions du faisceau singulier Φ. Soient φ leur nombre; 1, a, b, ... les facteurs par lesquels chacune d'elles multiplie les variables. Nous pourrons représenter ces substitutions elles-mêmes par 1, a, b, ...

50. 2°. H pourra contenir une substitution S afférente à ce faisceau singulier. Considérons dans ce cas le système Σ formé par les φ substitutions

$$S, \quad aS, \quad bS, \quad \ldots$$

Chacune d'elles, étant échangeable aux mêmes substitutions que S, sera afférente à φ.

Soient Σ, Σ_1, ... les systèmes distincts qu'on obtient en transformant Σ par les substitutions de H; leur nombre sera $\frac{h}{m}$, m étant le nombre des substitutions permutables à Σ. D'ailleurs chacun de ces systèmes pouvant s'obtenir en multipliant une quelconque de ses substitutions par les substitutions de Φ, deux systèmes ne peuvent avoir de substitution commune sans se confondre. Le nombre total des substitutions distinctes contenues dans Σ, Σ_1, ... sera donc $\varphi \cdot \frac{h}{m}$.

51. Reste à évaluer m.

Or pour qu'une substitution soit permutable à Σ, il faut et il suffit qu'elle transforme S en une substitution de Σ. Soient k le nombre des substitutions de Σ dans lesquelles S peut être transformée par les substitutions de H; n le nombre des substitutions de H qui sont échangeables à S; on aura $m = kn$.

Mais pour que S puisse être transformée en aS, il faut que ces substitutions aient le même déterminant; si d'ailleurs Δ est le déterminant de

S, celui de aS sera $a^p \varDelta$. Il faut donc qu'on ait $a^p = 1$. Le nombre k des valeurs qui peuvent être assignées au coefficient a sera donc $\overline{\gtrless} p$.

D'autre part, le nombre n des substitutions de G échangeables à S est égal à $\lambda\varphi$, λ étant un entier limité (N°. 43).

Le nombre des substitutions distinctes qui résultent de la transformation de celles de Σ sera donc

$$\varphi \cdot \frac{h}{k\lambda\varphi} = \frac{h}{k\lambda}.$$

52. S'il existe une autre substitution S' afférente à Φ, on verra de même que les substitutions S', aS', bS', ... et leurs transformées sont en nombre $\frac{h}{k'\lambda'}$, k' et λ' étant limités.

Continuant ainsi, on voit que le nombre total des substitutions afférentes à Φ sera

$$h\left\{\frac{1}{k\lambda} + \frac{1}{k'\lambda'} + \cdots\right\}.$$

53. 3°. H pourra contenir des substitutions T afférentes à un faisceau F non général, mais différent de Φ.

Soient $\mathfrak{F}$ le faisceau général qui contient F; f son ordre. Le nombre des substitutions T sera νf, et le nombre des substitutions permutables à F sera μf, μ et ν étant limités (N°s. 47 et 48).

Le nombre des faisceaux transformés de F par les substitutions de H sera donc $\frac{h}{\mu f}$; à chacun d'eux seront afférentes νf substitutions transformées des T; ce qui donnera $\frac{h\nu f}{\mu f} = h\frac{\nu}{\mu}$ substitutions résultant des T par transformation. Ces substitutions seront toutes distinctes, une même substitution ne pouvant être afférente à deux faisceaux différents (N°. 43)*).

54. Si H contenait d'autres substitutions T' afférentes à un autre faisceau F' non général, les T' et leurs transformées fourniraient de même $h\frac{\nu'}{\mu'}$ substitutions distinctes.

Continuant ainsi, on voit que le nombre total des substitutions afférentes à des faisceaux autres que Φ et non généraux sera

$$h\left\{\frac{\nu}{\mu} + \frac{\nu'}{\mu'} + \cdots\right\}.$$

*) On doit excepter les substitutions de Φ; mais celles-ci, étant évidemment afférentes aux faisceaux généraux, ne figurent pas parmi les T.

55. 4°. Considérons enfin les substitutions U afférentes à un faisceau général tel que $\mathfrak{F}$. Leur nombre sera nf, n étant un entier limité. Mais parmi elles se trouvent les φ substitutions de Φ, qui ont déjà été énumérées. En les supprimant, il en restera $nf-\varphi$.

D'autre part, le nombre des substitutions permutables à $\mathfrak{F}$ est égal à mf, m étant un entier limité. Le nombre des faisceaux transformés de $\mathfrak{F}$ sera donc $\frac{h}{mf}$, et le nombre total des substitutions qui leur sont afférentes sera $h\frac{nf-\varphi}{mf}$.

D'ailleurs $\mathfrak{F}$ contenant le faisceau Φ, on aura $f=q\varphi$, q étant un entier >1; et par suite

$$\frac{nf-\varphi}{mf} = \frac{n}{m}-\frac{1}{mq}.$$

56. Si H contenait des substitutions U' afférentes à un autre faisceau général $\mathfrak{F}'$, on verrait de même que ces substitutions et leurs transformées sont en nombre

$$\frac{n'}{m'}-\frac{1}{m'q'}$$

où n' et m' sont limités.

Continuant ainsi, on voit que le nombre des substitutions afférentes aux faisceaux généraux (celles de Φ exceptées) sera

$$h\left\{\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{mq}\right)+\left(\frac{n'}{m'}-\frac{1}{m'q'}\right)+\cdots\right\}.$$

57. L'énumération étant maintenant achevée, nous aurons:

$$(42.)\qquad h = \varphi+h\Sigma\frac{1}{k\lambda}+h\Sigma\frac{\nu}{\mu}+h\Sigma\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{mq}\right).$$

Dans cette équation, le nombre des termes contenus dans les sommes du second membre sera limité. Car leur somme doit être $<h$. Mais chacun d'eux est égal au produit de h par un coefficient dont on connaît une limite inférieure. En effet, k, λ, μ, m sont limités, et q étant >1,

$$\frac{n}{m}-\frac{1}{mq}\geqq\frac{1}{2m}.$$

Posons pour abréger

$$1-\Sigma\frac{1}{k\lambda}-\Sigma\frac{\nu}{\mu}-\Sigma\frac{n}{m} = -C.$$

L'équation (42.) donnera

$$(43.)\qquad h = \frac{\varphi}{-C+\frac{1}{mq}+\frac{1}{m'q'}+\cdots}.$$

Soit $\frac{1}{mq}$ le plus petit des termes $\frac{1}{mq}$, $\frac{1}{m'q'}$, ... Deux cas seront à distinguer, suivant la valeur de l'expression $-C+\frac{1}{m'q'}+\cdots$

58. Premier cas: $-C+\frac{1}{m'q'}+\cdots \gtreqless 0$. On aura

$$h \lesseqgtr \frac{\varphi}{\frac{1}{mq}} \lesseqgtr mq\varphi.$$

Mais H contient le groupe I d'ordre $mq\varphi$ formé par celles de ses substitutions qui sont permutables à $\mathfrak{F}$. On aura donc $h = mq\varphi$ et $H = I$. D'ailleurs m est un entier limité. La démonstration du théorème sera donc complète, si nous établissons que tout faisceau contenu dans H est nécessairement contenu dans $\mathfrak{F}$.

Soit F un semblable faisceau, dont les substitutions aient pour forme canonique

$$|x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots\quad ax,\ ay,\ cz,\ du,\ \ldots|$$

par exemple.

Chacune d'elles, élevée à une puissance au maximum égale à m, appartiendra à $\mathfrak{F}$; sans quoi l'ordre du groupe dérivé de $\mathfrak{F}$ et de F, et *à fortiori* l'ordre de H, serait $> mq\varphi$. Si donc nous posons pour abréger $1.2\ldots m = t$, les substitutions

$$(44.)\qquad |x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots\quad a^t x,\ a^t y,\ c^t z,\ d^t u,\ \ldots|$$

appartiendront toutes à $\mathfrak{F}$. Or, par hypothèse, les rapports de deux quelconques coefficients $a, c, d, \ldots$ prennent dans les substitutions de F un nombre illimité de valeurs; t étant limité, les rapports de $a^t, c^t, d^t, \ldots$ auront également un nombre illimité de valeurs. Les substitutions de $\mathfrak{F}$, étant échangeables aux substitutions (44.), seront de la forme

$$|x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots\quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z,\ \delta u,\ \ldots|$$

et auront pour forme canonique

$$|X,\ Y,\ z,\ u,\ \ldots\quad \alpha_1 X,\ \beta_1 Y,\ \gamma z,\ \delta u,\ \ldots|$$

X et Y étant des fonctions de x, y. Les substitutions de F, exprimées au

moyen des variables $X, Y, z, u, \ldots$, sont évidemment de la forme

$$|X, Y, z, u, \ldots \quad aX, aY, cz, du, \ldots|$$

cas particulier de la précédente. Elles sont donc contenues parmi celles de $\mathfrak{F}$.

59. Deuxième cas. $-C+\frac{1}{m'q'}+\cdots<0$. *A fortiori* $-C$ sera négatif. C'est d'ailleurs la somme algébrique d'un nombre limité de fractions dont chacune a son numérateur et son dénominateur limités. Donc C sera lui-même une fraction, à numérateur et dénominateur limités.

Soit maintenant r le nombre des termes de la somme $\frac{1}{mq}+\frac{1}{m'q'}+\cdots$ et soit $\frac{1}{m'q'}$ le plus grand de ces termes. On aura, d'une part,

$$-C+\frac{1}{m'q'}<0,$$

et d'autre part

$$-C+\frac{r}{m'q'} \geqq -C+\frac{1}{mq}+\frac{1}{m'q'}+\cdots>0,$$

car h doit avoir son dénominateur positif. On en déduit

$$\frac{r}{Cm'}>q'>\frac{1}{Cm'}.$$

L'entier q' est donc limité.

Posons $-C+\frac{1}{m'q'}=-C'$. Cette quantité sera une fraction négative, à numérateur et dénominateur limités.

Soit $\frac{1}{m''q''}$ la plus grande des quantités $\frac{1}{mq}, \frac{1}{m''q''}, \ldots$ On aura d'une part

$$-C'+\frac{1}{m''q''}<0$$

et d'autre part

$$-C'+\frac{r-1}{m''q''} \geqq -C+\frac{1}{mq}+\frac{1}{m'q'}+\frac{1}{m''q''}+\cdots>0$$

d'où

$$\frac{r-1}{C'm''}>q''>\frac{1}{C'm''}.$$

L'entier q'' est donc limité.

Continuant ainsi, on trouvera que $q', q'', \ldots$ et enfin q sont limités. Le dénominateur de h sera donc une fraction à numérateur et dénominateur

limités, et l'on aura

$$h = \lambda\varphi$$

λ étant un nombre limité.

Il est clair que les substitutions de H sont permutables à Φ.

Enfin H ne contient pas d'autre faisceau que Φ. Soit en effet F un faisceau quelconque contenu dans H, et soient

$$|x, y, z, \dots \quad ax, by, cz, \dots|$$

ses substitutions, ramenées à la forme canonique. Chacun des rapports $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \dots$ y est susceptible de λ valeurs distinctes tout au plus, sans quoi l'ordre de H serait $> \lambda\varphi$. Donc, d'après la définition des faisceaux, ces rapports doivent se réduire à l'unité, et F se confond avec Φ.

Le théorème est donc démontré dans toutes ses parties.

60. Soit F_0 le faisceau défini au théorème, et dont l'existence vient d'être démontrée; et soit pour fixer les idées

$$|x, y, z, u, \dots \quad ax, ay, cz, du, \dots|$$

la forme de ses substitutions. Les coefficients $a, c, d, \dots$ dans chacune d'elles sont des racines de l'unité. Les divers coefficients a, par exemple, seront donc les puissances d'une quantité θ, racine primitive d'une certaine équation binôme $\theta^\alpha = 1$.

De même, les b seront les puissances d'une racine primitive θ_1 d'une équation binôme $\theta_1^\beta = 1$; les c seront les puissances de θ_2, racine d'une équation $\theta_2^\gamma = 1$; etc.

Il en résulte que chacune des fonctions $x^\alpha, y^\beta, z^\gamma, \dots$ sera invariable par les substitutions de F_0. L'ordre de H étant égal à λ fois celui de F_0 (λ étant limité), $x^\alpha, y^\beta, z^\gamma, \dots$ s'exprimeront au moyen des racines d'une même équation d'ordre λ. On pourra donc donner au théorème l'énoncé suivant:

Théorème. *Si une équation différentielle linéaire d'ordre p*

$$\frac{d^p u}{dt^p} + A_1 \frac{d^{p-1}u}{dt^{p-1}} + \dots + A_p u = 0,$$

où $A_1, \dots A_p$ sont des fonctions rationnelles de u, a ses intégrales algébriques, elle admettra p intégrales particulières $x, y, z, \dots$ qui satisfassent à des équations binômes, dont les seconds membres soient des fonctions rationnelles de t et des racines d'une équation auxiliaire.

L'ordre λ de cette équation auxiliaire sera inférieur à une limite fixe, laquelle ne dépend que de p.

61. Soient enfin x^a, x_1^a, ... les diverses transformées de x^a par les substitutions de H; leur nombre ne peut surpasser λ; et leur produit

$$x^a x_1^a \ldots = (x x_1 \ldots)^a$$

sera rationnel.

D'ailleurs x_1, ... sont des fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$ L'expression $X = x x_1 \ldots$ sera donc une fonction entière et homogène de $x, y, z, \ldots$ de degré $\overline{\overline{<}} \lambda$, et qui satisfera à une équation binôme. On peut donc donner au théorème ce troisième énoncé, conforme à celui qu'a donné M. ***Fuchs*** pour les équations du second ordre.

On peut déterminer une fonction entière et homogène des intégrales de l'équation différentielle proposée, dont le degré soit inférieur à une limite fixe, et qui soit racine d'une équation binôme à coefficients rationnels.

Chapitre III. Equations du troisième ordre.

§. 1. Démonstration de l'équation fondamentale.

62. Proposons-nous de déterminer les groupes d'ordre fini formés de substitutions linéaires à trois variables.

Nous obtiendrons un semblable groupe en combinant ensemble un nombre quelconque de substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

où a, b, c sont des racines de l'unité.

On obtiendra de nouveaux groupes d'ordre fini en adjoignant aux substitutions qui précèdent une substitution de la forme

$$|x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|$$

ou de la forme

$$|x, y, z \quad a''y, b''z, c''x|$$

ou de l'une et l'autre à la fois (a', b', c', a'', b'', c'' étant des racines de l'unité).

Le groupe formé des substitutions

$$|x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|$$

sera également d'ordre fini, si les substitutions à deux variables

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y|$$

forment un groupe tétraédrique, octaédrique ou icosaédrique, les coefficients γ étant des racines de l'unité.

[illegible] évidentes, il existe [illegible].

[illegible] les substitutions dont il est [illegible]. Le groupe H dérivé des [illegible] d'ordre fini et chacune de ses [illegible].

[illegible] groupes tels que H; [illegible] sans difficulté: car on [illegible] de H tous les coefficients [illegible] pour obtenir la substitution correspondante [illegible].

[illegible] les plus généraux de substitutions [illegible] Chaque substitution de H [illegible] substitutions seront de trois espèces.

[illegible] forme canonique

$$S = [illegible] \quad a \gtrless b \gtrless c.$$

[illegible] En effet, pour qu'une substitution [illegible] S, il faut qu'elle lui soit [illegible] de la forme

$$[illegible]$$

[illegible] constituent un seul [illegible].

[illegible] forme canonique

$$S = [illegible] \quad a \gtrless c.$$

[illegible] échangeables est la suivante

$$[illegible]$$

[illegible] substitutions de H qui [illegible] S appartiendra aux divers faisceaux [illegible] aux divers faisceaux [illegible] des substitutions

$$[illegible]$$

[illegible] se réduisent à un seul.

[illegible] ses substitutions appartiendront

aux deux formes

$$(45.)\quad |x,\ y\quad \lambda x,\ \mu y|,$$

$$(46.)\quad |x,\ y\quad \lambda y,\ \mu x|.$$

Les substitutions (45.) constituent un premier faisceau.

Chacun des autres faisceaux contient une substitution T de la forme (46); ses autres substitutions sont échangeables à T. Or on vérifie immédiatement que les substitutions de K' échangeables à T se réduisent à celles qui résultent de la combinaison de T avec les substitutions de la forme

$$(47.)\quad a = |x,\ y\quad ax,\ ay|.$$

Prenons pour variables indépendantes à la place de x, y d'autres variables ξ, η qui ramènent T à sa forme canonique

$$|\xi,\ \eta\quad \sqrt{\lambda\mu}\,\xi,\ -\sqrt{\lambda\mu}\,\eta|.$$

Les substitutions a prenant la forme

$$|\xi,\ \eta\quad a\xi,\ a\eta|,$$

on voit que chacune des substitutions du faisceau considéré sera de la forme

$$|\xi,\ \eta\quad a\xi,\ b\eta|,\quad \text{où}\quad b = \pm a.$$

Les substitutions du faisceau correspondant de K, ayant pour déterminant 1, seront

$$|\xi,\ \eta,\ z\quad a\xi,\ b\eta,\ a^{-1}b^{-1}z|,\quad \text{où}\quad b = \pm a.$$

Le rapport $\frac{b}{a}$ n'y sera donc susceptible que des deux valeurs ± 1.

67. Si K' appartient au type tétraédrique, les divers faisceaux qu'il contient auront pour ordre les uns 2ω, les autres 3ω, ω étant le nombre des substitutions de la forme

$$|x,\ y\quad ax,\ ay|$$

contenues dans K' (N°s. 12 et 13). Leurs substitutions, ramenées à la forme canonique, seront donc de la forme

$$|\xi,\ \eta\quad a\xi,\ b\eta|$$

et celles des faisceaux correspondants du groupe K de la forme

$$|\xi,\ \eta,\ z\quad a\xi,\ b\eta,\ a^{-1}b^{-1}z|$$

où le rapport $\frac{b}{a}$ est susceptible de deux ou trois valeurs différentes.

68. Si K' appartient au type octaédrique, il contient trois sortes de faisceaux, d'ordre 2ω, 3ω, 4ω (N°. 13). Les faisceaux correspondants de K seront de la forme

$$|\xi, \eta, z \quad a\xi, b\eta, a^{-1}b^{-1}z|$$

où $\frac{b}{a}$ admet 2, 3 ou 4 valeurs différentes.

69. Enfin si K' appartient au type icosaédrique, il contiendra des faisceaux d'ordre 2ω, 3ω, 5ω (N°. 13) et les faisceaux correspondants de K seront de la forme

$$|\xi, \eta, z \quad a\xi, b\eta, a^{-1}b^{-1}z|$$

où $\frac{b}{a}$ admet 2, 3 ou 5 valeurs distinctes.

70. 3°. Enfin les substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ax, ay, az|$$

étant échangeables à toute substitution linéaire, appartiendront à tous les faisceaux. Celles de ces substitutions que H contient ayant pour déterminant 1, le coefficient a y sera une racine cubique de l'unité. Le nombre φ de ces substitutions sera donc égal à 1 ou à 3; elles forment un groupe, que nous désignons par Φ.

71. Proposons-nous maintenant d'énumérer les substitutions de H.

Nous aurons en premier lieu les φ substitutions de Φ.

Soit en second lieu F un des faisceaux contenus dans H; supposons ses substitutions ramenées à la forme canonique

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|.$$

Nous distinguerons divers cas:

Admettons d'abord que dans toutes les substitutions de F on ait $a = b$. Elles se réduiront à la forme

$$|x, y, z \quad ax, ay, cz|.$$

Le faisceau F contenant le groupe Φ, leur nombre sera un multiple de φ, tel que $m\varphi$.

Cela posé, les fonctions des variables que chaque substitution de F multiplie par un facteur constant, sont les fonctions linéaires de x, y, d'une part, et les multiples de z, d'autre part.

Pour qu'une substitution linéaire soit permutable à F, il faut qu'elle remplace ces fonctions les unes par les autres; et par suite qu'elle soit de la forme

$$|x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|.$$

Or soit K le groupe formé par les substitutions de cette sorte que H contient. Il se réduira à F; car s'il contenait une substitution S autre que celles de F, cette substitution, évidemment échangeable à celles de F, pourrait leur être adjointe pour former un faisceau plus général que F, ce qu'on suppose impossible.

Donc les seules substitutions de H qui soient permutables à F sont les $m\varphi$ substitutions de F; donc le nombre des faisceaux $F, F' \dots$ transformés de F par les substitutions de H sera $\frac{\Omega}{m\varphi}$, Ω étant l'ordre de H.

Cela posé, chacun des faisceaux $F, F', \dots$ contient $(m-1)\varphi$ substitutions autres que celles de Φ; et toutes ces substitutions sont distinctes, car chacune d'elles ne peut appartenir qu'à un seul faisceau, $K=F$ appartenant au premier type.

Le nombre des substitutions nouvelles résultant de la transformation de celles de F sera donc

$$\frac{(m-1)\varphi}{m\varphi}\Omega = \frac{m-1}{m}\Omega.$$

73. Si l'on avait un nouveau faisceau F_1 différent de F et de ses transformés, mais jouissant comme lui de la propriété que ses substitutions étant ramenées à la forme canonique deux des coefficients y fussent constamment égaux, soit $m_1\varphi$ le nombre de ces substitutions; on en déduirait de même par transformation $\frac{m_1-1}{m_1}\Omega$ substitutions distinctes entre elles et distinctes des précédentes, puisque chacune d'elles ne peut appartenir qu'à un seul faisceau.

Continuant ainsi, on voit que le nombre total des substitutions nouvelles existant dans les faisceaux de l'espèce considérée sera

$$\Omega.\Sigma\frac{m-1}{m}.$$

74. Soit au contraire F un faisceau tel que dans ses diverses substitutions, aucun des rapports $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}$ ne soit constamment égal à l'unité. Soit $n\varphi$ l'ordre de F; et soient K, L, M les groupes respectivement formés par celles des substitutions de H qui sont des formes suivantes:

$$|x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z|,$$
$$|x, y, z \quad \alpha x, \beta y+\gamma z, \beta' y+\gamma' z|,$$
$$|x, y, z \quad \alpha x+\gamma z, \beta y, \alpha' x+\gamma' z|.$$

Considérons les groupes K', L', M' à deux variables, respectivement correspondants à K, L, M, et formés des substitutions

$$|x, y \quad \alpha x+\beta y, \ \alpha' x+\beta' y|,$$
$$|y, z \quad \beta y+\gamma z, \ \beta' y+\gamma' z|,$$
$$|x, z \quad \alpha x+\gamma z, \ \alpha' x+\gamma' z|.$$

Nous supposerons d'abord

1°. Que chacun des groupes K', L', M' appartient au premier ou au second type.

2°. Que chacun des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{c}$ calculé successivement dans les diverses substitutions de F, y prend plus de deux valeurs distinctes.

Cela posé, les fonctions de x, y, z que chaque substitution de F multiplie par un facteur constant, se réduisent aux multiples de x, de y et de z. Toute substitution linéaire permutable à F, devant remplacer ces fonctions les unes par les autres, appartiendra à l'une des six formes

$$(48.) \quad |x, y, z \quad ax, by, cz|,$$
$$(49.) \quad |x, y, z \quad ay, bx, cz|,$$
$$(50.) \quad |x, y, z \quad ax, bz, cy|,$$
$$(51.) \quad |x, y, z \quad az, by, cx|,$$
$$(52.) \quad |x, y, z \quad ay, bz, cx|,$$
$$(53.) \quad |x, y, z \quad az, bx, cy|.$$

Soit G le groupe formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F. Celles de ses substitutions qui sont de la forme (48.) se réduisent évidemment aux $n\varphi$ substitutions de F; et l'ordre de G sera évidemment égal à $kn\varphi$, k étant égal à 1, 2, 3 ou 6 suivant que G contiendra des substitutions de la forme (48.) et d'une des formes (49.), (50.), (51.), ou des formes (48.), (52.) et (53.), ou enfin des 6 formes à la fois.

Le nombre des faisceaux distincts transformés de F sera donc $\frac{\Omega}{kn\varphi}$. Chacun d'eux contient d'ailleurs $(n-1)\varphi$ substitutions autres que celles de φ; ce qui donnera en tout

$$\frac{n-1}{kn}\Omega$$

substitutions.

Ces substitutions sont toutes distinctes. En effet, celles des substi-

tutions de F où les trois coefficients a, b, c sont inégaux n'appartiennent qu'à un seul faisceau. Considérons d'autre part celles où deux coefficients, ceux de x et y par exemple, sont égaux. Elles seront contenues dans ceux des faisceaux transformés de F que contient le groupe K. Mais si K' appartient au premier type, ces faisceaux se réduisent à un seul; s'il appartient au second type, il y aura plusieurs faisceaux; mais parmi eux il n'en est qu'un seul tel qu'en ramenant ses substitutions à la forme canonique les rapports des coefficients y aient plus de deux valeurs distinctes; F jouissant de cette propriété ainsi que ses transformés, les substitutions considérées ne pourront leur être communes.

75. Soit F_1 un autre faisceau différent de F et de ses transformés, mais jouissant des mêmes propriétés. Une énumération analogue entreprise sur F_1 et ses transformés donnera $\frac{n_1-1}{k_1 n_1}\Omega$ substitutions nouvelles.

Les faisceaux de l'espèce que nous considérons fourniront donc en tout

$$\Omega\Sigma\frac{n-1}{kn}$$

substitutions nouvelles.

76. Remarque. Si $k=3$ ou 6, le nombre n est assujetti à certaines conditions qu'il est utile de connaître.

1°. Si $k=6$, n est un carré, ou le triple d'un carré.

En effet, les substitutions des formes (49.) à (53.) que H contient transformant chacune des substitutions

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

de F en une substitution analogue, où les coefficients a, b, c sont permutés entre eux d'une manière quelconque, la suite des coefficients a sera identique à celle des b et à celle des c. Ces quantités étant d'ailleurs des racines de l'unité, chacune de ces suites sera formée des puissances d'une racine irréductible θ d'une certaine équation binôme $\theta^\varrho=1$. Le coefficient c étant ainsi susceptible de ϱ valeurs distinctes, l'ordre $n\varphi$ de F sera égal à ϱ fois le nombre des substitutions de F qui se réduisent à la forme

$$|x, y, z \quad a'x, b'y, z|.$$

Les b' étant des puissances de θ seront les diverses puissances d'une même irrationnelle $\theta^{\frac{\varrho}{\delta}}$, δ étant un diviseur de ϱ; b' sera donc susceptible de δ valeurs distinctes; à chacune d'elles correspond une valeur de a', déterminée par l'équation $a'b'=1$. L'ordre de F sera donc $\varrho\delta$.

Or nous allons prouver que δ est au moins égal à $\frac{\varrho}{3}$.

En effet, F contient une substitution de la forme

$$|x, y, z \quad ax, by, \theta z|, \qquad (\text{où } ab\theta = 1)$$

ainsi que sa transformée

$$|x, y, z \quad bx, ay, \theta z|.$$

Il contient leur produit

$$P = |x, y, z \quad \theta^{-1}x, \theta^{-1}y, \theta^2 z|,$$

et sa transformée

$$Q = |x, y, z \quad \theta^{-1}x, \theta^2 y, \theta^{-1}z|$$

et enfin il contiendra

$$PQ^2 = |x, y, z \quad \theta^{-3}x, \theta^3 y, z|$$

ce qui montre que 3 est un multiple de $\frac{\varrho}{\delta}$. On aura donc $\varrho = \delta$ ou 3δ, d'où $n\varphi = \delta^2$ ou $3\delta^2$. D'ailleurs $\varphi = 1$ ou 3. Donc n sera un carré ou le triple d'un carré.

77. 2°. Si $k = 3$, ceux des facteurs premiers de n qui sont de la forme $3i-1$ y figureront à une puissance paire.

Soient en effet p l'un de ces facteurs, μ son degré de multiplicité. Le faisceau F contiendra un groupe Ψ d'ordre p^μ. Soient

$$|x, y, z \quad a'x, b'y, c'z|$$

ses substitutions. La suite des a', celle des b' et celle des c' seront identiques et formées des puissances d'une racine primitive θ d'une équation binôme $\theta^{p^\lambda} = 1$. Celles de ces substitutions où $c' = 1$ seront de la forme

$$|x, y, z \quad a''x, b''y, z|$$

et b'' y prendra $p^{\lambda'}$ valeurs distinctes, λ' étant $\overline{\leq} \lambda$. L'ordre de Ψ sera $p^{\lambda+\lambda'} = p^\mu$.

Nous allons prouver que $\lambda = \lambda'$.

En effet, Ψ contient une substitution où $c' = \theta$; laquelle sera de la forme

$$S = |x, y, z \quad \theta^\alpha x, \theta^{-\alpha-1}y, \theta z|.$$

Il contient sa transformée

$$T = |x, y, z \quad \theta^{-\alpha-1}x, \theta y, \theta^\alpha z|.$$

Il contiendra donc la substitution

$$S^m T^n = |x,\ y,\ z \quad \theta^{\alpha m-(\alpha+1)n}x,\ \theta^{-(\alpha+1)m+n}y,\ \theta^{m+\alpha n}z|.$$

Or on peut déterminer m et n de telle sorte qu'on ait

$$\left.\begin{aligned}-(\alpha+1)m+n &\equiv r,\\ m+\alpha n &\equiv s,\end{aligned}\right\} \text{mod.}p^\lambda$$

r et s étant des entiers quelconques. Car le déterminant des deux congruences, ayant pour valeur

$$\alpha^2+\alpha+1 = \frac{\alpha^3-1}{\alpha-1}$$

diffère de 0 mod.p, la congruence $\alpha^3-1=0$ n'admettant, comme on sait, d'autre racine réelle que l'unité lorsque p est de la forme $3i-1$.

On obtient donc, en faisant varier r et s, $p^{2\lambda}$ substitutions distinctes. D'ailleurs Ψ n'en peut contenir davantage. Donc $\mu=2\lambda$, ce qu'il fallait démontrer.

78. Supposons maintenant que le groupe K' soit icosaédrique. On sait (N°. 33.) qu'il est dérivé de la combinaison de substitutions A, B, C de déterminant 1 avec des substitutions de la forme

$$(54.)\qquad |x,\ y \quad ax,\ ay|$$

et qu'en désignant par ω le nombre de ces dernières substitutions, les faisceaux contenus dans K' seront d'ordre $\mu\omega$, μ étant l'un des trois nombres 2, 3, 5.

Le faisceau F', d'ordre $\mu\omega$, correspondant à F, s'obtiendra en combinant des substitutions de la forme (54.) avec une substitution d'ordre μ et de déterminant 1, laquelle aura par conséquent pour forme canonique

$$|x,\ y \quad \theta x,\ \theta^{-1}y|$$

θ étant racine primitive de l'équation $\theta^{2\mu}=1$.

Parmi les substitutions du faisceau F se trouvera donc la suivante:

$$S = |x,\ y,\ z \quad \theta x,\ \theta^{-1}y,\ z|.$$

Les groupes L', M' appartiendront au premier type. En effet, considérons par exemple le groupe L'. Il contient un faisceau F'' correspondant à F et d'ordre $r\omega'$, r étant le nombre des valeurs distinctes que prend dans ses substitutions le rapport des coefficients de y et de z et ω' le nombre de celles de ces substitutions où ces coefficients sont égaux. D'ailleurs r est un multiple de 2μ; car le rapport des coefficients prend dans S et ses puissances 2μ valeurs distinctes.

Or on sait (Nos. 11 à 13) que dans un groupe tétraédrique on a $r=2$ ou 3, dans un groupe octaédrique $r=2$, 3 ou 4, et dans un groupe icosaédrique $r=2$, 3 ou 5.

Donc si $\mu > 2$, le groupe L' appartiendra au premier ou au second type. Si $\mu=2$, il appartiendra à l'un de ces deux types, ou au type octaédrique.

Mais si L' appartenait au second type ou au type octaédrique, le groupe formé par les substitutions de L' permutables à F'' aurait son ordre double de l'ordre de F'' (Nos. 6 ou 13); donc L' contiendrait une substitution de la forme

$$(55.)\qquad |y,\ z \quad bz,\ cy|,$$

et L une substitution de la forme

$$T = |x,\ y,\ z \quad ax,\ bz,\ cy|.$$

F contiendrait la substitution

$$T^{-1}ST = |x,\ y,\ z \quad \theta x,\ y,\ \theta^{-1}z|$$

et ses puissances. Le nombre des valeurs du rapport des coefficients de x et de y y serait donc au moins égal à 2μ, au lieu d'être simplement égal à μ.

Notre proposition est donc démontrée. Il est établi en outre que H ne peut contenir aucune substitution de la forme (50.) (car L' en contiendrait une de la forme (55.)). D'ailleurs il en contient une de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bx,\ cz|$$

puisque K' est icosaédrique.

Donc le nombre des substitutions permutables à F sera $2\mu\omega$ (No. 74); et les faisceaux transformés de F seront en nombre $\frac{\Omega}{2\mu\omega}$.

Cela posé, F contient $(\mu-1)\omega$ substitutions pour lesquelles $a \gtrless b$; chacune d'elles n'appartient qu'à un seul faisceau, même celles où l'on aurait $a=c$ ou $b=c$ (car L' et M' appartiennent au premier type).

On aura donc $\frac{\mu-1}{2\mu}\Omega$ substitutions résultant de la transformation de celles de F où $a \gtrless b$.

Posant successivement $\mu=2$, 3, 5, et ajoutant, on voit qu'on obtiendra

$$\tfrac{1}{4}\Omega+\tfrac{2}{6}\Omega+\tfrac{4}{10}\Omega = \tfrac{59}{60}\Omega$$

substitutions par la transformation des substitutions de F, les ω substi-

tutions de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ ay,\ cz|$$

étant exceptées.

Parmi ces dernières substitutions, il en est $\omega-\varphi$ qui n'appartiennent pas à Φ. Chacune d'elles étant échangeable aux 60ω substitutions de K, elles donneront $\frac{\omega-\varphi}{60\omega}\Omega$ substitutions distinctes.

On peut d'ailleurs remarquer que ω est un multiple de φ. En outre ω est pair, car F contient la substitution

$$B^2 = |x,\ y,\ z \quad -x,\ -y,\ z|,$$

qui est d'ordre 2.

Posons donc $\omega = 2\lambda\varphi$, d'où

$$\frac{\omega-\varphi}{60\omega}\Omega = \left(\tfrac{1}{60}-\frac{1}{120\lambda}\right)\Omega.$$

Ajoutant ces substitutions aux précédentes, on voit que K et ses transformés donneront

$$\Omega\left(1-\frac{1}{120\lambda}\right)$$

substitutions nouvelles.

79. Supposons maintenant K' octaédrique. Il sera dérivé (N°. 33) de substitutions de la forme (32.) en nombre ω, jointes à des substitutions A, B, C, nD et contiendra la substitution

$$A^{-1}(nD)^2 = n^2.$$

Le faisceau F' correspondant à F et contenu dans K' aura pour ordre $\mu\omega$, μ étant l'un des nombres 2, 3 ou 4; et résultera de la combinaison des substitutions (32.) avec une substitution S où le rapport des coefficients de x et de y soit une racine $\mu^{\text{ième}}$ de l'unité. Cette substitution S sera évidemment de la forme $n^{\varrho}\Sigma$, où Σ est une substitution de déterminant 1, laquelle sera par suite de la forme

$$\Sigma = |x,\ y \quad \theta x,\ \theta^{-1}y|$$

où θ est racine primitive de l'équation $\theta^{2\mu} = 1$.

On peut supposer $\varrho = 0$ ou 1, car K' contient la substitution n^2, laquelle est de la forme (32.), et il est évidemment indifférent de combiner aux substitutions de cette forme la substitution S ou la substitution $n^{2\sigma}S$, où σ est un entier quelconque. On pourrait même supposer $\varrho = 0$ si F'

[illegible] contienne pas, et qu'on [illegible] faisceau dérivé des substi[illegible] transformés. La substitution C [illegible] $S = \Sigma$, d'où $\varrho = 0$.

[illegible] F [illegible] des transformés du faisceau [illegible] aura donc $\varrho = 1$.

[illegible] F [illegible] des transformés du faisceau [illegible] substitution δDC laquelle correspond [illegible] dans le groupe des substitutions entre [illegible] $\varrho = 2$.

[illegible] les substitutions

[illegible]

[illegible] on aura toujours $\varrho = 0$ et [illegible] que le rapport du coef[illegible] au moins [illegible] valeurs distinctes dans les [illegible] F appartiennent au premier [illegible] les substitutions (56.) four[illegible] substitutions distinctes.

[illegible] et ajoutant les résultats, on [illegible] par les substitutions (56.) fourniront [illegible] substitutions, ce qui en posant $\omega = 2\lambda\varphi$, don[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] n'appartienne pas à F, mais que [illegible] valeurs distinctes dans les substitutions (56.). [illegible] F contenant la substitution A^2, pour [illegible] les rapports du coefficient de z à [illegible] dans les substitutions de F ayant au moins 6 valeurs, [illegible] arriver au même résultat.

[illegible] les racines de l'équation $i^4 = 1$; n^2 fai[illegible] partie, n^3 sera une puis[illegible] primitive de l'équation $j^4 = 1$. Comme on peut

d'ailleurs remplacer n par une quelconque de ses puissances impaires, on pourra supposer n égal à une puissance impaire de j, et enfin égal à j.

Les substitutions (56.) résulteront évidemment de la combinaison des puissances de la substitution

$$|x, y, z \quad ix, iy, i^{-2}z|$$

avec des substitutions où $a^3 = 1$, lesquelles appartiendront à Φ.

Cela posé, si $\mu = 3$, d'où $\varrho = 0$, ou bien $\mu = 2$, d'où $\varrho = 1$, le nombre des valeurs des rapports du coefficient de z à ceux de x et de y dans les puissances de la substitution (57.) étant 6 ou 8, on pourra appliquer les mêmes raisonnements que dans les cas précédents.

On trouvera ainsi, que celles des substitutions de F pour lesquelles x et y ont des coefficients différents, en fournissent

$$\frac{\mu-1}{2\mu}\Omega$$

par transformation; et que celles où ces coefficients sont égaux en fournissent

$$\frac{\omega-\varphi}{24\omega}\Omega.$$

82. Soit au contraire $\mu = 4$, d'où $\varrho = 1$. La substitution (57.) se réduisant à

$$|x, y, z \quad ix, y, i^{-1}z|$$

dont la combinaison avec (56.) fournit les substitutions

$$|x, y, z \quad i^{\alpha}x, i^{\beta}y, i^{-\alpha-\beta}z|,$$

F résultera de la combinaison de celles-ci avec les Φ.

Les rapports des coefficients de x, y, z dans ces substitutions ayant chacun 4 valeurs distinctes, chacun des groupes L', M', pourra appartenir soit au premier type, soit au second, soit enfin au type octaédrique.

Si tous deux étaient du premier type, on retrouverait encore les conclusions précédentes.

Supposons au contraire que L' soit du second type, ou du type octaédrique; il contiendra une substitution de la forme

$$|y, z \quad bz, cy|.$$

Donc H contient une substitution de la forme

$$S = |x, y, z \quad ax, bz, cy|.$$

D'ailleurs, K' étant octaédrique, H contient une substitution de la forme

$$T = |x, y, z \quad ay, bx, cz|.$$

En les combinant ensemble, on voit que H contient une substitution de chacune des 6 formes (48.) à (53.).

L'ordre de F étant 16φ, l'ordre du groupe I formé par les substitutions de H qui lui sont permutables sera donc 6.16φ.

Cela posé, F contient 6φ substitutions où les coefficients de x, y, z sont inégaux. Ces substitutions sont spéciales à ce faisceau; et leurs transformées seront en nombre

$$\frac{6\varphi}{6.16\varphi}\Omega = \frac{\Omega}{16}.$$

Les autres substitutions de F ont déjà été comptées. En effet, celles où x et y ont le même coefficient ont été comptées dans les faisceaux d'ordre 2φ et 3φ contenus dans K; et celles où x et z, ou y et z ont le même coefficient ont été également comptées, étant les transformées de celles-là par les substitutions dérivées de S et T.

Remarquons d'ailleurs que les groupes K, L, M étant transformés les uns dans les autres par ces mêmes substitutions, L' et M' seront octaédriques, ainsi que K'.

Réunissant les $\frac{\Omega}{16}$ substitutions que nous venons de trouver à celles en nombre

$$\tfrac{1}{4}\Omega + \tfrac{2}{6}\Omega + \frac{\omega - \varphi}{24\,\omega}\Omega$$

que fournissent les transformés des autres faisceaux contenus dans K, et remarquant d'ailleurs que dans les hypothèses actuelles on aura $\omega = 4\varphi$, on trouvera pour le nombre total des transformées des substitutions de K

$$\tfrac{65}{96}\Omega.$$

83. Supposons maintenant que a^3 n'ait que les deux valeurs ± 1; n^3 sera une puissance impaire de i, et l'on pourra supposer $n = i$. Les substitutions (56.) résulteront de la combinaison de

$$|x, y, z \quad -x, -y, z|$$

avec les Φ.

Si $\mu = 3$ ou 4, les raisonnements ci-dessus seront applicables. Mais si $\mu = 2$, la substitution (57.) se réduisant à

$$|x, y, z \quad -x, y, -z|,$$

F résultera de la combinaison des Φ avec les substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad (-1)^{\alpha} x, (-1)^{\beta} y, (-1)^{\alpha+\beta} z|$$

et les groupes L, M pourront appartenir à un type quelconque.

Si tous deux étaient du premier type, on raisonnerait comme précédemment. Dans le cas contraire, nous remettrons à plus tard l'énumération des substitutions fournies par F et ses transformés. Les autres faisceaux contenus dans K fourniront

$$\tfrac{2}{6}\Omega + \tfrac{3}{8}\Omega + \frac{\omega-\varphi}{24\omega}\Omega$$

substitutions; mais $\omega = 2\varphi$; le nombre ci-dessus se réduira donc à

$$\tfrac{33}{48}\Omega.$$

84. Supposons maintenant K' tétraédrique. Il sera dérivé (N°. 33) de substitutions de la forme (32.) en nombre $\omega = 2\lambda\varphi$, jointes à des substitutions A, B, mC, et contiendra la substitution $(mC)^3 = m^3$.

L'ordre de F' sera $\mu\omega$, où $\mu = 2$ ou 3.

Si $\mu = 2$, les raisonnements ci-dessus seront applicables, et les transformées des substitutions de F, autres que celles de la forme (56.) seront en nombre $\frac{1}{4}\Omega$, celles des substitutions (56.) seront en nombre

$$\frac{\omega-\varphi}{12\omega}\Omega = \left(\tfrac{1}{12} - \frac{1}{24\lambda}\right)\Omega.$$

85. Soit d'autre part $\mu = 3$; et supposons les substitutions de F ramenées à leur forme canonique

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|.$$

On aura 3 valeurs distinctes pour $\frac{b}{a}$; et un nombre pair de valeurs distinctes pour $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, F contenant la substitution

$$A^2 = |x, y, z \quad -x, -y, z|.$$

Celles des substitutions de H qui sont permutables à F forment un groupe I et sont toutes de l'une des six formes (48.) à (53.).

Mais aucune d'elles n'est de la forme (49.). Car elle aurait pour correspondante dans K' la substitution

$$S = |x, y \quad ay, bx|$$

permutable à F', sans lui appartenir.

Or une semblable substitution ne peut exister. En effet, K' est isomorphe au groupe alterné entre 4 lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et F' est formé de celles des substitutions de K' qui correspondent aux puissances d'une substitution circulaire ternaire telle que $(\alpha\beta\gamma)$. La substitution correspondante à S serait permutable au groupe formé par ces puissances, sans lui appartenir, ce qui est manifestement impossible.

Les formes (50.) à (53.) sont également inadmissibles. Supposons en effet, pour fixer les idées, qu'on eût une substitution de la forme (50.). Elle transformerait chaque substitution de F, telle que

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

en

$$|x, y, z \quad ax, cz, by|.$$

Mais le groupe formé par ces transformées ne peut être identique à F, $\frac{c}{a}$ et $\frac{b}{a}$ n'ayant pas le même nombre de valeurs distinctes.

Les substitutions de I seront donc toutes de la forme (48.); donc I se confond avec F, et a pour ordre $\mu\omega$.

Cela posé, si $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ ont chacun plus de deux valeurs, on voit aisément que les groupes L' et M' appartiendront au premier type.

Le nombre des faisceaux distincts transformés de F étant $\frac{\Omega}{\mu\omega}$, celles des substitutions de F où $a > b$ fourniront $\frac{(\mu-1)\omega}{\mu\omega}\Omega = \frac{2}{3}\Omega$ transformées distinctes.

Joignant ces substitutions à celles déjà énumérées, on voit que les substitutions de K fourniront en tout

$$\Omega\left(1-\frac{1}{24\lambda}\right)$$

transformées distinctes.

86. Supposons enfin que $\frac{c}{b}$, par exemple, n'ait que deux valeurs distinctes; F résultera de la combinaison de la substitution A^2 avec des substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ax, by, bz|$$

et comme $\frac{b}{a}$ a 3 valeurs, ces dernières substitutions résulteront elles-mêmes de la combinaison d'une substitution

$$(58.) \qquad |x, y, z \quad a\tau x, ay, az|$$

où τ est une racine cubique de l'unité, avec les substitutions de Φ.



La substitution (58.) ayant pour déterminant 1, on aura $a^3 \tau = 1$, ce qui montre que a est une racine neuvième de l'unité. En la désignant par θ, la substitution (58.) deviendra

$$|x,\ y,\ z \quad \theta^{-2}x,\ \theta y,\ \theta z|.$$

Son cube multipliant toutes les variables par une même racine cubique de l'unité, on aura $\varphi = 3$; et les substitutions de F auront pour forme générale

$$|x,\ y,\ z \quad (-1)^{\varrho}\theta^{-2\sigma}x,\ (-1)^{\varrho}\theta^{\sigma}y,\ \theta^{\sigma}z|.$$

Cela posé, le rapport des coefficients de x et de z ayant six valeurs distinctes, M' appartiendra au premier type. Si L' y appartenait également, les raisonnements précédents seraient applicables. Dans le cas contraire, $\frac{c}{b}$ ayant 2 valeurs, L' sera du second type; car s'il était de l'un des types polyédriques, H contiendrait une substitution de la forme (50.) ce qui a été démontré impossible.

87. Celles des substitutions de L' qui multiplient y et z par un même facteur constant sont les 9 substitutions

$$|y,\ z \quad \theta^{\sigma}y,\ \theta^{\sigma}z|$$

et l'ordre de L' sera égal à $18t$, en désignant par $9t$ l'ordre du groupe A du premier type auquel les substitutions de L' sont permutables.

On aura $t > 2$. En effet, les 18 substitutions

$$|y,\ z \quad (-1)^{\varrho}\theta^{\sigma}y,\ \theta^{\sigma}z|$$

que nous désignerons par $\psi_1,\ \psi_2,\ \dots$ forment un faisceau Ψ contenu dans L'. Soit S une autre substitution de L'; ce groupe contiendra les 36 substitutions

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ S\psi_1,\ S\psi_2,\ \dots$$

évidemment distinctes. Si t était égal à 2, il n'en contiendrait pas d'autres. Donc les substitutions

$$\psi_1 S,\ \psi_2 S,\ \dots$$

qu'il contient également, et qui diffèrent de $\psi_1,\ \psi_2,\ \dots$, se confondraient à l'ordre près avec $S\psi_1,\ S\psi_2,\ \dots$ Donc S serait permutable au faisceau Ψ, et par suite serait de la forme

$$|y,\ z \quad bz,\ cy|.$$

H contiendrait une substitution correspondante

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ bz,\ cy|$$

ce qui est impossible.

88. Cela posé, prenons au lieu de y, z de nouvelles variables y', z' choisies de manière à ramener A à sa forme canonique.

Ses substitutions seront de la forme

$$|y',\ z'\quad by',\ cz'|$$

où le rapport $\frac{c}{b}$ aura t valeurs distinctes. Les substitutions correspondantes de H forment un faisceau

$$(59.)\qquad |x,\ y',\ z'\quad ax,\ by',\ cz'|$$

où chacun des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ a aussi au moins 3 valeurs distinctes; car parmi ces substitutions se trouve la suivante

$$|x,\ y,\ z\quad \theta^{-2}x,\ \theta y,\ \theta z| = |x,\ y',\ z'\quad \theta^{-2}x,\ \theta y',\ \theta z'|$$

où ce rapport est une racine cubique de l'unité.

Le faisceau (59.) est donc l'un de ceux dont on a précédemment énuméré les substitutions (N°s. 74, 78, 80 à 83 et 85).

89. Si donc nous voulons énumérer les substitutions de F, il faudra exclure celles de ses substitutions qui lui sont communes avec le faisceau (59.), c'est-à-dire toutes celles où y et z ont le même coefficient. Il faudra exclure également les substitutions pour lesquelles x et y ont le même coefficient, celles-ci ayant été déjà comptées.

Ces suppressions faites, il restera dans F les substitutions de la forme

$$x,\ y,\ z\quad -\theta^{2\sigma}x,\ -\theta^{\sigma}y,\ \theta^{\sigma}z|$$

où $\sigma \not\equiv 0 \bmod. 3$. Elles sont en nombre 6, car σ pourra prendre 6 valeurs distinctes par rapport au module 9.

D'ailleurs F contient 18 substitutions et le groupe I formé par les substitutions de H qui lui sont permutables se confond avec lui (N°. 85); F aura donc $\frac{\Omega}{18}$ transformés distincts; ce qui donnera

$$\tfrac{6}{18}\Omega = \tfrac{1}{3}\Omega$$

substitutions nouvelles (toutes distinctes évidemment, puisque M' appartient au premier type).

La transformation de K fournira donc en tout

$$\tfrac{1}{4}\Omega+\left(\tfrac{1}{12}-\frac{1}{24\lambda}\right)\Omega+\tfrac{1}{3}\Omega = \tfrac{15}{24}\Omega$$

substitutions nouvelles (λ étant ici égal à 1).

90. Il ne nous reste plus à examiner que les faisceaux F tels que dans leurs substitutions

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ by,\ cz|$$

$\frac{b}{a}$ n'ait que deux valeurs distinctes, ± 1, et qu'aucun des groupes K', L', M' ne soit tétraédrique ou icosaédrique.

Supposons d'abord que $\frac{c}{a}$ ne soit pas constamment égal à ± 1. Il en sera évidemment de même de $\frac{c}{b}$.

On peut admettre que K' n'est pas octaédrique; car le faisceau F serait l'un de ceux précédemment étudiés (N°. 82.).

Quant à L' et M', ils appartiendront au premier type, car si L', par exemple, appartenait au second type, ou au type octaédrique, H contiendrait une substitution de la forme (50.), qui serait permutable à F, ce qui est absurde, les rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ n'ayant pas le même nombre de valeurs.

On voit de la même manière que H ne peut contenir aucune substitution des formes (51.), (52.), (53.). Si donc on désigne par $2p\varphi$ l'ordre de F, le nombre des faisceaux transformés de F sera $\frac{\Omega}{2lp\varphi}$, l étant égal à 1 ou à 2, suivant que H contiendra ou non une substitution de la forme (49.).

91. Cela posé, celles des substitutions de F pour lesquelles $\frac{b}{a} = -1$ sont en nombre $p\varphi$ et fourniront par transformation

$$\frac{p\varphi}{2lp\varphi}\Omega = \frac{\Omega}{2l}$$

substitutions distinctes.

Considérons d'autre part les $p\varphi$ substitutions de la forme

$$(60.) \qquad |x,\ y,\ z \quad ax,\ ay,\ cz|.$$

Deux cas pourront se présenter:

92. 1°. Si l'ordre du groupe K', lequel est évidemment un multiple de $2lp\varphi$, est égal à $2mp\varphi$, m étant >2, les substitutions où $a=b$ auront déjà été comptées.

En effet, K', n'appartenant pas aux types polyédriques, et ayant son ordre $>2p\varphi$, appartiendra au second type, et contiendra un faisceau J'

l'autre sera permutable à ses substitutions. Soient x', y', les variables qui le ramènent à sa forme canonique

$$|x', y' \quad a'x', b'y'|.$$

I sera dérivé d'une substitution de cette forme, où $\frac{b'}{a'}$ est racine de l'unité, jointe aux substitutions

$$|x, y \quad ax, ay| = |x', y' \quad ax', ay'|.$$

Quant au faisceau F', d'ordre $2p\varphi$, il résultera de la combinaison des substitutions (60.) avec une substitution de la forme

$$(61.) \qquad |x', y' \quad \alpha y', \beta x'|.$$

Soit J le faisceau formé par les substitutions

$$(62.) \qquad |x', y', z \quad a'x', b'y', cz|$$

de H qui correspondent à celles de J'. Les rapports $\frac{c}{a'}$, $\frac{c}{b'}$ auront chacun plus de deux valeurs. Supposons en effet que $\frac{c}{a'}$, par exemple, fût toujours égal à ± 1; J contient la transformée

$$|x', y', z \quad b'x', a'y', cz|$$

de (62.) par (61.); donc $\frac{c}{b'}$ serait égal à ± 1. Donc $\frac{b'}{a'}$ serait aussi toujours égal à ± 1, contrairement à l'hypothèse.

Le faisceau J sera donc un de ceux étudiés plus haut; et les substitutions (60.) y auront déjà été comptées. Donc F et ses transformés ne fourniront que $\frac{\Omega}{2}$ ou $\frac{\Omega}{4}$ substitutions nouvelles, suivant qu'on aura $l=1$ ou 2.

93. 2°. Si $m=1$, K' se réduisant à F', appartiendra au premier type, et F fournira par transformation

$$\frac{2p\varphi-\varphi}{2p\varphi}\,\Omega = \Omega.\frac{2p-1}{2p}$$

substitutions.

94. 3°. Soit enfin $m=2$. K' contenant F' et ayant un ordre double de celui de F' résultera de la combinaison de F' avec une substitution S permutable à F' (N°. 87), laquelle sera de la forme

$$|x, y \quad a'y, b'x|.$$

On aura donc $l=2$; et celles des substitutions de F où $a \gtrless b$ donneront $\frac{\Omega}{4}$ transformées. Celles où $a=b \gtrless c$ sont en nombre $(p-1)\varphi$, et donneront

$\frac{(p-1)\varphi}{4p\varphi}\Omega = \frac{\Omega}{4} - \frac{\Omega}{4p}$ transformées. Le total des transformées fournies par F sera donc

$$\Omega\left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{4p}\right) = \Omega.\frac{2p-1}{2.2p}.$$

Ce nombre se réduirait à $\frac{\Omega}{4}$ si l'on avait déjà compté les substitutions où $a = b$, ce qui arriverait si les faisceaux autres que F et contenus dans K avaient déjà été considérés avant lui.

95. Il ne nous reste plus qu'à considérer les faisceaux F tels que dans toutes leurs substitutions

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

les rapports des coefficients deux à deux soient égaux à ± 1.

Ces substitutions seront de 4 sortes contenant chacune φ substitutions:

Celles où $a = b = c$.

Celles où $a = b = -c$.

Celles où $a = -b = c$.

Celles où $-a = b = c$.

Les substitutions de la première sorte sont celles de Φ, qui ont été comptées.

Celles de la seconde sorte, étant échangeables aux substitutions

$$|x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|$$

du groupe K, donneront par transformation $\frac{\varphi}{\psi}\Omega$ substitutions, ψ étant l'ordre de K. Mais il se peut que ces substitutions aient été comptées.

Elles l'auront été nécessairement si ψ, lequel est un multiple de 4φ, ordre de F, est supérieur à 8φ.

Considérons en effet le groupe K' formé des substitutions

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y|:$$

il a évidemment le même ordre que K. D'ailleurs celles de ses substitutions qui correspondent aux substitutions des deux premières sortes sont en nombre 2φ.

Si ce groupe est polyédrique, il contiendra un faisceau d'ordre 6φ, dont les substitutions, ramenées à la forme canonique, seront

$$|x', y' \quad a'x', b'y'|$$

$\frac{b'}{a'}$ ayant trois valeurs distinctes.

S'il est du second type, et d'ordre $4m\varphi$, où $m > 2$, il contiendra un faisceau analogue où $\frac{b'}{a'}$ aura m valeurs distinctes.

Dans l'un et l'autre cas H contiendra un faisceau

$$|x', y', z \quad a'x', b'y', cz|$$

dont font partie les substitutions considérées

$$|x, y, z \quad ax, ay, -az| = |x', y', z \quad ax', ay', -az|,$$

et $\frac{b'}{a'}$ ayant plus de deux valeurs, les substitutions de ce faisceau auront été énumérées.

Pour que les substitutions en question doivent être comptées, il faut donc, ou bien que K' soit du premier type, auquel cas il se confondra avec le groupe F' formé par les substitutions correspondantes à celles de F, en nombre 4φ, ou qu'il soit du second type, et d'ordre 8φ.

Si donc les substitutions considérées n'ont pas encore été comptées, on aura $\psi = 4\varphi$ ou 8φ; et par suite

$$\frac{\varphi}{\psi}\Omega = \frac{\Omega}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{8}.$$

Les substitutions de chacune des deux autres sortes donneront de même un nombre de substitutions nouvelles égal à $\frac{\Omega}{4}$ ou à $\frac{\Omega}{8}$ ou à zéro.

Tout autre faisceau analogue à celui que nous venons de considérer donnerait des résultats de même nature.

96. L'énumération des substitutions de H est maintenant terminée. Le nombre total étant Ω, il résulte de l'analyse précédente qu'on aura l'équation fondamentale

$$\varphi + \Omega\Sigma = \Omega$$

d'où

$$(63.) \qquad \Omega = \frac{\varphi}{1-\Sigma},$$

Σ étant une somme de termes des formes suivantes

$$1-\frac{1}{120\lambda},\ 1-\frac{1}{48\lambda},\ \tfrac{65}{96},\ \tfrac{33}{48},\ 1-\frac{1}{24\lambda},\ \tfrac{15}{24},\ \frac{m-1}{km},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8}$$

où $k = 1, 2, 3$ ou 6, et où m est assujetti aux restrictions suivantes:

1°. Si $k = 3$, m ne contient de facteurs premiers de la forme $3i-1$ qu'à des puissances paires. 2°. Si $k = 6$, m est carré ou triple d'un carré.

§. 2. Recherche des solutions de l'équation fondamentale.

97. Il nous reste à discuter l'équation (63.). Mais nous simplifierons notablement cette étude à l'aide des remarques suivantes.

Remarque I. ***Si M désigne le dénominateur de l'un quelconque des termes de Σ, Ω sera divisible par $M\varphi$. Il sera d'ailleurs $> M\varphi$.***

En effet ce terme a été obtenu par la considération d'un groupe d'ordre $M\varphi$ contenu dans H. Donc $M\varphi$ divise Ω.

D'ailleurs ce groupe d'ordre $M\varphi$ appartient à l'un des types du N°. 62. Donc si H n'appartient pas lui-même à ces types, son ordre Ω sera $> M\varphi$.

98. Remarque II. ***Si H contient deux groupes I et J, contenant eux-mêmes Φ, et ayant respectivement pour ordres $r\varphi$ et $s\varphi$; et si d'ailleurs la série des transformées des substitutions de I par celles de H, et la série des transformées des substitutions de J n'ont aucune substitution commune sauf celles de Φ, Ω sera divisible par $rs\varphi$.***

En effet, soient $\varphi_0 = 1$, φ_1, φ_2, ... les substitutions de Φ; $i_0 = 1$, i_1, ..., i_{r-1} des substitutions convenablement choisies dans I; on sait que les substitutions de I seront de la forme $i_\alpha\varphi_\beta$, chaque système de valeurs de α, β fournissant une substitution différente.

Les substitutions de J pourront de même se mettre sous la forme $j_\gamma\varphi_\delta$, $j_0 = 1$, j_1, ..., j_{s-1} étant des substitutions convenablement choisies, et chaque système de valeurs de γ, δ fournissant une substitution différente.

Cela posé, soit S une substitution quelconque de H; ce groupe contiendra les $rs\varphi$ substitutions

$$i_\alpha\varphi_\beta S j_\gamma$$

lesquelles seront distinctes.

Supposons en effet qu'on eût

$$(64.)\qquad i_\alpha\varphi_\beta S j_\gamma = i_{\alpha'}\varphi_{\beta'} S j_{\gamma'}.$$

On en déduirait

$$S^{-1}\varphi_{\beta'}^{-1} i_{\alpha'}^{-1} i_\alpha\varphi_\beta S = j_{\gamma'} j_\gamma^{-1}.$$

Le premier membre de cette égalité est la transformée par S d'une substitution de I; le second est une substitution de J; ces deux substitutions ne pourront être égales, par hypothèse, que si elles appartiennent à Φ.

On aura donc

$$j_\gamma j_{\gamma'}^{-1} = \varphi_\delta, \quad \text{d'où} \quad j_\gamma = \varphi_\delta j_{\gamma'} = j_{\gamma'}\varphi_{\delta'}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] ne peuvent être égales que si [illegible]

[illegible] soit T l'une de celles qui [illegible] les $rs\varphi$ substitutions

[illegible]

[illegible] elles sont également distinctes des [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] sous la forme $j_{\alpha}\varphi_{1}$; et comme [illegible]

[illegible]

[illegible] sous la forme $i_{\nu}\varphi_{\varrho}$. [illegible] de la forme $i_{\nu}\varphi_{\varrho}Sj_{\alpha}$, et T serait, [illegible] déjà énumérées.

[illegible] On verra de même [illegible] et ainsi de suite.

[illegible] $\frac{m-1}{km}$, $\frac{m'-1}{k'm'}$, Ω [illegible]

[illegible] qui ont fourni [illegible] satisfont, d'après notre [illegible] groupes I et J du N°. précédent.

[illegible] avec un terme [illegible] Ω sera divisible par $96m\varphi$, [illegible]

[illegible] d'ordre $m\varphi$, qui a donné [illegible] et d'autre part un groupe K d'ordre 96φ, 48φ

ou 24φ qui a produit l'autre terme; et il résulte de notre analyse que leurs transformés n'ont pas de substitutions communes, sauf les Φ.

101. Corollaire III. *Si Σ contient un terme $\frac{m-1}{km}$ où $k=1$ ou 3, et un terme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$, Ω sera divisible par $2m\varphi$; il le serait par $4m\varphi$, si Σ contenait, avec le terme $\frac{m-1}{km}$, un terme $\frac{1}{8}$.*

Soient en effet

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

les substitutions du faisceau F qui a donné le terme $\frac{m-1}{km}$; K', L', M' les groupes correspondants définis au N°. 74; et qui, par hypothèse, appartiennent au premier ou au second type. Si l'un deux, tel que K', appartenait au second type, il contiendrait une substitution de la forme

$$|x, y \quad ay, bx|$$

et H contenant la substitution correspondante

$$|x, y, z \quad ay, bx, cz|$$

le nombre k serait pair, contrairement à ce qu'on a supposé.

Donc K', L', M' sont du premier type; et les substitutions de F et de ses transformés n'appartiennent chacune qu'à un seul faisceau (N°. 74).

Or un terme de la forme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ dans l'expression de Σ serait produit par un faisceau F' d'ordre $2p\varphi$ (N°s. 90 à 94); un terme de la forme $\frac{1}{8}$ serait produit par un faisceau d'ordre 4φ (N°. 95). Ces faisceaux et leurs transformés n'ayant aucune substitution commune avec F et ses transformés, on pourra appliquer la proposition du N°. 98.

102. Remarque III. *L'existence dans Σ d'un terme $\frac{m-1}{6m}$ entraîne en général l'existence d'un terme $\frac{1}{2}$ ou de deux termes $\frac{1}{4}$, sauf les exceptions suivantes.*

1°. *Si $m=9$ ou 27, ces termes pourront être remplacés par un terme $\frac{15}{24}$.*

2°. *Si $m=12$ on pourra n'avoir qu'un seul terme égal à $\frac{1}{4}$.*

3°. *Enfin si $m=3$, ces termes pourront ne pas exister.*

Soient F le faisceau qui a fourni le terme $\frac{m-1}{6m}$;

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

ses substitutions. Les coefficients a, b, c seront (N°. 76) les puissances d'une racine irréductible θ d'une équation binôme $\theta^\rho=1$; et F contiendra entre

autres substitutions les suivantes

$$(65.)\quad P = |x, y, z \quad \theta^{-1}x, \theta^{-1}y, \theta^{2}z|.$$

$$(66.)\quad |x, y, z \quad \theta^{-1}x, \theta^{2}y, \theta^{-1}z|.$$

Soient K, L, M les groupes définis au N°. 74; K sera dérivé des substitutions de F, jointes à des substitutions de la forme

$$(67.)\quad |x, y, z \quad \alpha y, \beta x, \gamma z|.$$

103. Soit $\mathfrak{F}$ l'un des faisceaux autres que F contenus dans K. Il contiendra une substitution S de la forme (67.) et s'obtiendra en la combinant avec celles des substitutions de F qui lui sont échangeables, lesquelles auront pour forme

$$(68.)\quad |x, y, z \quad ax, ay, cz|.$$

Remplaçons x, y par d'autres variables x', y', choisies de manière à ramener S à sa forme canonique

$$S = |x', y', z \quad \sqrt{\alpha\beta}x', -\sqrt{\alpha\beta}y', \gamma z|.$$

Les substitutions (68.) deviendront

$$|x', y', z \quad ax', ay', cz|$$

et en particulier P deviendra

$$|x', y', z \quad \theta^{-1}x', \theta^{-1}y', \theta^{2}z|.$$

Dans les substitutions de $\mathfrak{F}$, le rapport des coefficients de x', y' sera partout égal à ± 1. Au contraire, le rapport des coefficients de z à ceux de x' et y', prenant dans les puissances successives de P les valeurs $\theta^3, \theta^6, \theta^9, \ldots$ aura plus de deux valeurs distinctes si $\theta^6 \gtrless 1$, et plus de trois, si l'on a en même temps $\theta^9 \gtrless 1$.

Admettons donc que ces rapports aient plus de deux valeurs dans les substitutions de $\mathfrak{F}$; H ne pourra contenir aucune substitution des formes (50.), (51.), (52.), (53.) (N°. 90).

Soient donc L, M les groupes respectivement formés par les substitutions de H qui sont de la forme

$$|x', y', z \quad \alpha x', \beta y'+\gamma z, \beta' y'+\gamma' z|,$$

$$|x', y', z \quad \alpha x'+\gamma z, \beta y', \alpha' x'+\gamma' z|.$$

Le groupe L' formé des substitutions

$$|y', z \quad \beta y'+\gamma z, \beta' y'+\gamma' z|$$

appartiendra au premier type, ou au type tétraédrique; ce dernier cas ne

pouvant d'ailleurs se présenter que si le rapport des coefficients de y' et de z n'a que trois valeurs dans les substitutions de $\mathfrak{F}$; ce qui suppose $\theta^9 = 1$.

Le groupe M' formé des substitutions

$$|x', z \quad \alpha x' + \gamma z, \ \alpha' x' + \gamma' z|$$

appartiendra de même au premier type, sauf le cas ou $\theta^9 = 1$, auquel cas il pourrait être tétraédrique.

104. Raisonnons dans le cas général, où L' et M' appartiennent au premier type. Le faisceau $\mathfrak{F}$ appartiendra à l'espèce considérée au N°. 90 et fournira par transformation $\frac{\Omega}{2l}$ substitutions nouvelles, l étant égal à 2 ou à 1, suivant que K contient ou non une substitution de la forme

$$|x', y', z \quad \alpha y', \beta x', \gamma z|.$$

Or soit ω le nombre des substitutions de la forme (68.); $\mu\omega$ l'ordre de F; K contiendra $2\mu\omega$ substitutions, dont $\mu\omega$ de la forme (67.), parmi lesquelles ω appartiendront à $\mathfrak{F}$. Le nombre total des faisceaux $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \dots$ analogues à $\mathfrak{F}$ que K contient est donc μ, et chacun d'eux a pour ordre 2ω. D'ailleurs celles des substitutions de K qui sont permutables à $\mathfrak{F}$ sont évidemment en nombre $2l\omega$; $\mathfrak{F}$ aura donc $\frac{2\mu\omega}{2l\omega}$ transformés.

Si donc $l = 1$, les groupes $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \dots$ seront les transformés d'un seul d'entre eux, fournissant dans Σ le terme $\frac{1}{2}$. Mais si $l = 2$, chacun de ces μ groupes n'ayant que $\frac{\mu}{2}$ transformés, ils se partageront en deux séries fournissant chacune un terme $\frac{1}{4}$.

105. On voit donc que les substitutions du groupe K, étant transformées par les substitutions de H, fourniront en tout

$$\left(\frac{m-1}{6m} + \tfrac{1}{4}\right)\Omega$$

substitutions distinctes.

Ces substitutions n'appartiendront à aucun faisceau, autre que ceux qui sont contenus dans K et ses transformés.

En effet, cela résulte pour celles des substitutions de K qui appartiennent à $\mathfrak{F}$ de ce que les groupes L', M' appartiennent au premier type. Quant aux substitutions de F, celles où $a \gtrless b \gtrless c$ n'appartiennent qu'à un faisceau; celles où $a = b$, où $b = c$, où $a = c$ appartiennent respectivement aux faisceaux contenus dans K, L, M. Mais K, L, M sont transformés les

uns dans les autres par la substitution de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bz,\ cx|$$

que H contient.

106. Ces conséquences pourraient cesser d'avoir lieu, si θ étant une racine 9ième de l'unité, l'un des groupes L', M' était tétraédrique. La considération de ce groupe donnerait dans Σ un terme $\frac{1}{2}\frac{5}{4}$. D'ailleurs les substitutions de F étant de la forme

$$(69.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^{\alpha}x,\ \theta^{\beta}y,\ \theta^{-\alpha-\beta}z|$$

où α et β peuvent varier de 0 à 8, on aura $m\varphi = 81$, si F contient toutes les substitutions (69.) et comme on aura évidemment dans ce cas $\varphi = 3$, on aura $m = 27$.

Si F ne contient pas toutes les substitutions (69.) il contiendra au moins celles qui dérivent des substitutions (65.) et (66.), lesquelles forment le tiers du total. On aura donc $m\varphi = 27$ et $\varphi = 3$, d'où $m = 9$.

107. Il nous reste à considérer le cas où $\theta^6 = 1$. Les rapports des coefficients a, b, c dans les substitutions de F devant prendre plus de 2 valeurs, θ sera nécessairement une racine cubique, ou une racine sixième de l'unité; de plus, F devra contenir, non seulement les substitutions (65.) et (66.), mais toutes les substitutions (69.).

Si $\theta^3 = 1$, on aura $m = 3$, $\varphi = 3$. Ce cas échappe à nos raisonnements.

108. Soit $\theta^6 = 1$, d'où $m = 12$, $\varphi = 3$. Considérons comme tout à l'heure le faisceau $\mathfrak{F}$ dérivé de la substitution

$$(70.)\qquad S = |x,\ y,\ z \quad \alpha y,\ \beta x,\ \gamma z| = |x',\ y',\ z \quad \sqrt{\alpha\beta}\,x',\ -\sqrt{\alpha\beta}\,y',\ \gamma z|$$

et des substitutions de F

$$(71.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^{\lambda}x,\ \theta^{\lambda}y,\ \theta^{-2\lambda}z| = |x',\ y',\ z \quad \theta^{\lambda}x',\ \theta^{\lambda}y',\ \theta^{-2\lambda}z|$$

où x et y ont le même coefficient.

Les rapports du coefficient de z à celui de x et à celui de y ont les deux valeurs ± 1 dans les substitutions (71.) suivant que λ est pair ou impair. Ces rapports auront donc dans les substitutions de $\mathfrak{F}$ un nombre pair de valeurs, lequel sera > 2 si l'on n'a pas $\gamma = \pm\sqrt{\alpha\beta}$. On pourra donc, si cette équation n'a pas lieu, appliquer tous les raisonnements précédents, et en déduire l'existence dans Σ d'un terme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ fourni par le faisceau $\mathfrak{F}$.

Supposons au contraire qu'on ait $\gamma^2 = \alpha\beta$. F contenant la substitution

$$T = |x,\ y,\ z \quad \theta x,\ y,\ \theta^{-1}z|$$

K contiendra le produit

$$TS = |x, y, z \quad \alpha y, \beta\theta x, \quad \gamma\theta^{-1} z|$$

où l'équation analogue à $\gamma^2 = \alpha\beta$ ne sera plus vérifiée. Le faisceau $\mathfrak{F}'$ dérivé de TS et des substitutions (71.) fournira donc un terme $\frac{1}{4}$.

109. Ces préliminaires posés, procédons à la discussion de l'équation (63.).

Premier cas: *Σ contient un terme de la forme* $1-\frac{1}{120\lambda}$.

Ce terme sera unique; autrement $1-\Sigma$ serait évidemment négatif, ce qui est absurde. On aura donc

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-1+\frac{1}{120\lambda}} = 120\lambda\varphi.$$

Mais Ω contient un groupe K dont les substitutions sont de la forme

$$|x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z|$$

ayant pour ordre $120\lambda\varphi$ et tel que le groupe correspondant K' formé des substitutions

$$|x, y \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y|$$

soit icosaédrique.

Les groupes Ω et K, ayant le même ordre, se confondront. Le groupe Ω sera donc l'un de ceux déjà signalés (N°. 62.).

On voit de même qu'on doit rejeter l'hypothèse où Σ contiendrait un terme de l'une des formes $1-\frac{1}{48\lambda}$, $1-\frac{1}{24\lambda}$.

110. Ces trois formes écartées, pour simplifier la discussion des autres cas, nous distinguerons les termes $\frac{m-1}{km}$ en quatre classes, $\frac{m-1}{m}$, $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}$ suivant la valeur du coefficient k.

Lorsque à un terme $\frac{q-1}{6q}$ sera associé un terme $\frac{1}{2}$ ou deux termes $\frac{1}{4}$ (N°. 102), nous les grouperons en un seul $\left(\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}\right)$.

Les termes $\frac{q-1}{6q}$ qui font exception au théorème du N°. 102 auront pour valeur numérique

$$\begin{aligned} \tfrac{13}{81} &\text{ si } q = 27, \\ \tfrac{4}{27} &\text{ si } q = 9, \\ \tfrac{11}{72} &\text{ si } q = 12, \\ \tfrac{1}{9} &\text{ si } q = 3. \end{aligned}$$

D'ailleurs Σ ne pourra contenir de termes $\frac{13}{81}$, $\frac{4}{27}$ à l'état isolé que s'il contient un terme $\frac{15}{24}$; et de termes $\frac{11}{72}$ que s'il contient un terme $\frac{1}{4}$.

Enfin, pour plus de simplicité, nous fondrons en un seul terme $\frac{\alpha}{8}$ les termes de la forme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ qui n'auraient pas été groupés avec des termes $\frac{q-1}{6q}$, et ceux des termes $\frac{m-1}{m}$, $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}$ dont le dénominateur diviserait 8.

On réunira de même en un seul terme $\frac{\beta}{9}$ ceux des termes $\frac{m-1}{m}$, $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}$ dont le dénominateur divise 9.

Cela posé, Σ sera exprimé par une somme de termes des formes suivantes $\frac{65}{96}$, $\frac{33}{48}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{m-1}{m}$, $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$, $\frac{13}{81}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{11}{72}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$ avec les restrictions suivantes:

$$m > 4 \gtrless 8 \gtrless 9,$$
$$n > 4 \gtrless 9.$$

D'autre part, p étant >4 et n'admettant qu'à des puissances paires les facteurs premiers de la forme $3i-1$, on aura

$$p > 6.$$

Enfin q est carré ou triple d'un carré, et >4; on aura donc

$$q \geqq 9.$$

111. Deuxième cas: *Σ contient un terme $\frac{15}{24}$.*

Ce terme ne peut être unique, car Ω ne serait pas un multiple de φ, comme cela doit être.

D'ailleurs $1-\Sigma$ devant être >0, les termes complémentaires ne pourront appartenir qu'aux formes suivantes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{13}{81}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$ (car un terme $\frac{11}{72}$ entraînerait l'existence d'un terme $\frac{1}{4}$).

1°. Si dans la somme S des termes complémentaires figure un terme $\frac{p-1}{3p}$, il ne peut être seul; car on aurait

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{15}{24}-\frac{p-1}{3p}} = \frac{\varphi}{\frac{1}{24}+\frac{1}{3p}} < 3p\varphi,$$

résultat absurde, Ω devant être un multiple de $3p\varphi$ (N°. 97).

Mais p étant $\geqq 7$, $\frac{p-1}{3p} \geqq \frac{2}{7}$. Si donc Σ contenait quelque autre terme, il serait >1, ce qui est absurde.

2^0. Si S contient un terme $\frac{13}{81}$, elle ne pourra contenir plus d'un autre terme, et de quelque manière qu'on le choisisse, $\frac{\Omega}{\varphi}$ serait fractionnaire.

3^0. Si S contenait deux termes $\frac{4}{27}$, $\frac{\Omega}{\varphi}$ serait ou négatif ou fractionnaire.

4^0. Si S contient un terme égal à $\frac{4}{27}$, $\frac{\Omega}{\varphi}$ sera négatif ou fractionnaire, à moins qu'on ne pose

$$S = \tfrac{4}{27} + \tfrac{2}{9},$$

ce qui donnera

$$\Omega = 8.27.\varphi.$$

5^0. Enfin si S se réduit à la forme $\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}$, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1 - \frac{15}{24} - \frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{9}} = \frac{72\varphi}{27 - 9\alpha - 8\beta}.$$

D'ailleurs Ω doit être > 0 et divisible par 24φ (N°. 97) et même par 3.24φ si $\beta > 0$ (N°. 100).

On ne peut satisfaire à ces conditions qu'en posant $\alpha = 2$, $\beta = 1$

$$\Omega = 72\varphi.$$

112. Admettons désormais que Σ ne contienne aucun terme $\frac{15}{24}$. Elle ne contiendra par suite aucun terme $\frac{13}{81}$ ou $\frac{4}{27}$.

Troisième cas: *Σ contient un terme $\frac{65}{96}$.*

S'il était seul, $\frac{\Omega}{\varphi}$ serait fractionnaire. $1 - \Sigma$ étant positif, la somme S des termes complémentaires sera exclusivement formée de termes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$.

1^0. Si S contient un terme $\frac{p-1}{3p}$, il sera seul (sinon $1 - \Sigma$ serait négatif), et l'on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1 - \frac{65}{96} - \frac{p-1}{3p}} = \frac{96p\varphi}{32 - p}.$$

Mais Ω est divisible par $96p\varphi$ (N°. 100). Donc $p = 31$,

$$\Omega = 96.31\varphi.$$

2^0. Si S est de la forme $\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}$, on aura $\alpha + \beta < 3$, (sinon $1 - \Sigma$ serait négatif); et par suite

$$\Omega \overline{\overline{<}} \frac{\varphi}{1 - \frac{65}{96} - \frac{2}{8}} < 96\varphi,$$

ce qui est absurde (N°. 97.).

113. Quatrième cas: *Σ contient un terme $\frac{33}{48}$.*

Ce terme ne peut être seul, car $\frac{\Omega}{\varphi}$ serait fractionnaire. Les termes complémentaires auront la même forme qu'au cas précédent.

1°. Si S contient un terme $\frac{p-1}{3p}$, il sera seul, et l'on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{33}{48}-\frac{p-1}{3p}} = \frac{48p\varphi}{16-p}.$$

Mais il est divisible par $48p\varphi$. On aurait donc $p = 15$, valeur inadmissible (N°. 77) comme contenant le facteur 5 à une puissance impaire.

2°. Si $S = \frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}$, on aura $\Omega < 0$ si $\alpha+\beta > 2$; $\Omega < 48\varphi$ si $\alpha+\beta \overline{\gtrless} 2$; l'un et l'autre est absurde.

114. Il reste à discuter les cas où Σ est exclusivement formé de termes

$$\frac{m-1}{m}, \quad \frac{n-1}{2n}, \quad \frac{p-1}{3p}, \quad \frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}, \quad \frac{11}{72}, \quad \frac{\alpha}{8}, \quad \frac{\beta}{9}.$$

Cinquième cas: *Σ contient un terme $\frac{m-1}{m}$.*

Soit S la somme des autres termes. On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{m-1}{m}-S} = \frac{\varphi}{-S+\frac{1}{m}}.$$

Or $\Omega > m\varphi$ (N°. 97). Donc $S > 0$.

D'autre part, m étant au moins égal à 5, on aura

$$0 < 1-\Sigma < 1-\tfrac{4}{5}-S, \quad \text{d'où} \quad S < \tfrac{1}{5}.$$

Il faudra par suite supposer $S = \frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{9}$.

1°. Si $S = \frac{1}{8}$, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{8}+\frac{1}{m}} = \frac{8m\varphi}{8-m}.$$

Mais il est divisible par $4m\varphi$ (N°. 101). Donc $8-m$ divise 2; $m = 6$ ou 7.

$$\text{Si} \quad m = 6, \quad \Omega = 24\varphi.$$

$$\text{Si} \quad m = 7, \quad \Omega = 56\varphi.$$

2°. Si $S = \frac{1}{9}$, on aurait $\Omega = \frac{9m\varphi}{9-m}$. Il devrait être divisible par $3m\varphi$. Donc $9-m$ divise 3; $m = 6$ ou 8.

Mais $m \gtrless 8$ (N°. 110); donc on aura

$$m = 6, \quad \Omega = 18\varphi.$$

115. Sixième cas: *Σ contient deux termes* $\frac{n-1}{2n}$, $\frac{n'-1}{2n'}$. Soit S la somme des autres termes: on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n'-1}{2n'} - S} = \frac{\varphi}{-S + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n'}}.$$

Ω étant $> 2n\varphi$, (N°. 97) on aura

$$-S + \frac{1}{2n'} < 0, \quad \text{et } \textit{à fortiori} \quad S > 0.$$

D'autre part, Ω étant > 0, et n, n' au moins égaux à 5, on aura

$$-S + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10} > 0, \quad S < \tfrac{1}{5}.$$

Donc $S = \frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{6}$.

1°. Soit $S = \frac{1}{8}$, et supposons $n' \leqq n$. On aura

$$0 < -\tfrac{1}{8} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n'} < -\tfrac{1}{8} + \frac{1}{n'}, \quad \text{d'où} \quad n' < 8.$$

Si $n' = 7$:

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{8} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{14}} = \frac{8.7n\varphi}{28 - 3n}.$$

Or il est divisible par $2n\varphi$ et $7n\varphi$ (N°s. 97 et 99); donc $28 - 3n$ divise 4, d'où $n = 8$ ou 9. Mais $n \gtrless 9$ (N°. 110). Donc $n = 8$, d'où

$$\Omega = 2.7.8\varphi.$$

Si $n' = 6$, $\Omega = \frac{24n\varphi}{12 - n}$. Il est divisible par $6n\varphi$. Donc $12 - n$ divise 4; et l'on pourra poser

$$\begin{aligned} n &= 8, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 48\varphi, \\ n &= 10, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 120\varphi, \\ n &= 11, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 4.6.11\varphi. \end{aligned}$$

Enfin, si $n' = 5$, $\Omega = \frac{8.5n\varphi}{20 - n}$; $20 - n$ divisera 4; d'où

$$\begin{aligned} n &= 16, \quad \Omega = 160\varphi, \\ n &= 18, \quad \Omega = 360\varphi, \\ n &= 19, \quad \Omega = 8.5.19\varphi. \end{aligned}$$

2°. Soit $S = \frac{1}{6}$, $n' \leqq n$. On aura $n' < 9$.

Si $n' = 8$, $\Omega = \frac{18.8n\varphi}{72-7n}$. Or il est divisible par $2n\varphi$, $nn'\varphi$, $3n\varphi$ (N°s. 97 et 99). Donc $72-7n$ divise 6; d'où

$$n = 10, \quad \Omega = 9.8.10\varphi.$$

Si $n' = 7$, $\Omega = \frac{18.7n\varphi}{63-5n}$; $63-5n$ divisera 6; d'où

$$n = 12, \quad \Omega = 6.7.12\varphi.$$

Si $n' = 6$, $\Omega = \frac{36n\varphi}{18-n}$; et $18-n$ divise 6; d'où les solutions

$$n = 12, \quad \Omega = 72\varphi,$$
$$n = 15, \quad \Omega = 180\varphi,$$
$$n = 16, \quad \Omega = 18.16\varphi,$$
$$n = 17, \quad \Omega = 36.17\varphi.$$

Enfin, si $n' = 5$, $\Omega = \frac{18.5n\varphi}{45-n}$; et comme il est divisible par $2n\varphi$, $nn'\varphi$, $3n\varphi$, $45-n$ divisera 3; d'où les solutions

$$n = 42, \quad \Omega = 6.5.42\varphi,$$
$$n = 44, \quad \Omega = 18.5.44\varphi.$$

116. Septième cas: *Σ contient un seul terme de l'espèce $\frac{n-1}{2n}$, et deux termes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{p'-1}{3p'}$.*

La somme de ces termes étant $\gtreqqless \frac{4}{10}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$, on aurait $1-\Sigma < 0$, si Σ contenait un autre terme, lequel serait au moins égal à $\frac{1}{6}$.

Ces termes étant seuls, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{n-1}{2n}-\frac{p-1}{3p}-\frac{p'-1}{3p'}} = \frac{\varphi}{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}},$$

p et p' étant $\gtreqqless 7$, Ω serait < 0 si n était $\gtreqqless 7$.

1°. Soit donc $n = 6$. On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{12}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}}.$$

Soit $p' \leqq p$; Ω serait négatif si p' était > 8; donc, vu les restrictions imposées à p' (N°. 110), on aura $p' = 7$, d'où

$$\Omega = \frac{3.28p\varphi}{28-3p},$$

$28-3p$ devra diviser 4; et comme $p \gtrless 8$, il faudra poser

$$p=9, \quad \Omega = 3.28.9\varphi.$$

2°. Soit $n=5$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{15}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}}.$$

Si $p' \overline{\overline{<}} p$, on aura $p'<10$, d'où $p'=7$ ou 9.

Soit d'abord $p'=7$, d'où $\Omega = \frac{105p\varphi}{35-2p}$. Il doit être divisible par $2n\varphi$, $3p\varphi$, $np\varphi$, $pp'\varphi$. Donc p doit être pair, et $35-2p$ se réduire à l'unité; ce qui est contradictoire.

Soit enfin $p'=9$, d'où $\Omega = \frac{3.45p\varphi}{45-4p}$; p devra être pair, et $45-4p$ divisera 3; ce qui est contradictoire.

117. Huitième cas: *Σ contient un seul terme $\frac{n-1}{2n}$, et un seul terme $\frac{p-1}{3p}$.*

Soit S la somme des autres termes; on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{n-1}{2n}-\frac{p-1}{3p}-S} = \frac{\varphi}{\frac{1}{6}-S+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3p}}.$$

Comme $n \overline{\overline{>}} 5$, $p \overline{\overline{>}} 7$, il faudra, pour que Ω soit positif, qu'on ait

$$\tfrac{1}{6}-S+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{21}>0, \quad \text{d'où} \quad S<\tfrac{76}{210}.$$

On a d'autre part $\Omega > 2n\varphi$, d'où $S>\frac{1}{6}$.

S étant composé de termes $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$ (un terme $\frac{1}{12}$ entraînant d'ailleurs l'existence d'un terme $\frac{2}{8}$) ne pourra satisfaire aux deux inégalités ci-dessus que s'il est égal à $\frac{2}{8}$, à $\frac{2}{9}$ ou à $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$.

1°. Soit d'abord $S=\frac{2}{8}$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{12}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3p}}.$$

Ω étant >0 et $p \overline{\overline{>}} 7$, on aura

$$-\tfrac{1}{12}+\frac{1}{2n}+\tfrac{1}{21}>0, \quad \text{d'où} \quad n<14.$$

Si $n=13$, $\Omega = \frac{12.13p\varphi}{52-7p}$; et comme il est divisible par $3p\varphi$, $np\varphi$, $2p\varphi$ (Nos. 99 et 101), $52-7p$ devrait diviser 2, ce qui est absurde.

Si $n = 12$, $\Omega = \frac{24p\varphi}{8-p}$: $8-p$ divisera 2: donc $p = 7$.

$$\Omega = 24.7\varphi.$$

Enfin, si $n \leqq 11$, Ω sera négatif dès que p sera égal à 9: donc $p = 7$, d'où $\Omega = \frac{28n\varphi}{14-n}$. Il est divisible par $pn\varphi$. Donc $14-n$ divise 4: d'où $n = 10$, $\Omega = 280\varphi$: solution inadmissible, Ω devant être divisible par $3p\varphi$.

2°. Soit $S = \frac{2}{3}$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{18} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3p}}$$

p n'ayant de facteurs premiers $3i-1$ qu'à des puissances paires, sera l'un des nombres 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, 31, ...

Si $p = 7$, il viendra $\Omega = \frac{126n\varphi}{63-n}$: et $63-n$ divisera 3: d'où les solutions

$$n = 60, \quad \Omega = 42.60\varphi,$$
$$n = 62, \quad \Omega = 126.62\varphi.$$

Si $p = 9$, $\Omega = \frac{54n\varphi}{27-n}$: et $27-n$ divisera 3: donc $n = 24$, $\Omega = 54.8\varphi$, ou $n = 26$, $\Omega = 54.26\varphi$. Mais ces solutions sont absurdes, Ω devant être divisible par $3p\varphi$.

Si $p = 12$, $\Omega = \frac{36n\varphi}{18-n}$: $18-n$ divisera 3: donc

$$n = 15, \quad \Omega = 12\ 15\varphi$$

ou

$$n = 17, \quad \Omega = 36.17\varphi.$$

Si $p = 13$, $\Omega = \frac{2.3.39n\varphi}{3.39-7n}$: et $3.39-7n$ diviserait 3, ce qui est absurde.

Si $p = 16$, $\Omega = \frac{144n\varphi}{72-5n}$: et $72-5n$ diviserait 3, ce qui est absurde.

Soit enfin $p \geqq 19$, on aura $n \leqq 14$: sinon Ω serait négatif.

Posons d'abord $n = 13$, $\Omega = \frac{9.13p\varphi}{39-2p}$: p devra être pair, et $39-2p$ diviser 3; donc $p = 18$, solution inadmissible.

Si $n = 12$, $\Omega = \frac{72p\varphi}{24-p}$: $24-p$ divisera 6. Donc $p = 18, 21, 22$

ou 23. La solution $p = 21$, seule admissible pour p, donnera

$$\Omega = 72.7\varphi.$$

Si $n = 11$, $\Omega = \frac{99p\varphi}{33-p}$; et $33-p$ divisera 3; donc $p = 30$ ou 32, solutions inadmissibles.

Si $n = 10$, $\Omega = \frac{180p\varphi}{60-p}$; $60-p$ divisera 6; donc $p = 54$, 57, 58 ou 59. La solution $p = 57$, seule admissible, donnera

$$\Omega = 60.57\varphi.$$

Enfin si n était < 10, on aurait $\Omega \overline{\overline{<}} 3p\varphi$, ce qui est impossible.

3°. Soit $S = \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{72} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3p}}.$$

Si $p = 7$, $\Omega = \frac{7.72n\varphi}{7.36-11n}$, et $7.36-11n$ devra diviser 12, ce qui est impossible.

Si $p = 9$, $\Omega = \frac{3.72n\varphi}{108-7n}$; et $108-7n$ devra diviser 12; donc $n = 15$, d'où

$$\Omega = 72.15\varphi.$$

Si $p = 12$, $\Omega = \frac{24n\varphi}{12-n}$; $12-n$ devra diviser 2; d'ailleurs Ω étant divisible par $3p\varphi$, n serait un multiple de 3, ce qui est contradictoire.

Si $p = 16$, $\Omega = \frac{144n\varphi}{72-7n}$ et le dénominateur devrait diviser 3, ce qui est impossible.

Si $p \overline{\overline{>}} 19$ on aura $n < 10$; sinon Ω serait négatif.

Soit donc $n = 9$, d'où $\Omega = \frac{72p\varphi}{24-p}$; $24-p$ devra diviser 2; donc $p = 22$ ou 23, solutions inacceptables.

Si $n = 8$, $\Omega = \frac{144p\varphi}{48-p}$, et $48-p$ divisera 6; donc $p = 42$, 45, 46 ou 47, solutions inadmissibles.

Enfin si $n \overline{\overline{<}} 7$, on aura $\Omega < 3p\varphi$, ce qui est absurde.

118. Neuvième cas: *Σ contient un seul terme $\frac{n-1}{2n}$ et ne contient aucun terme $\frac{p-1}{3p}$.*

Il ne peut contenir aucun terme $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$; car même dans le cas le plus favorable, où $n=5$, $q=9$, $1-\Sigma$ serait <0.

On aura donc

$$\Sigma = \frac{n-1}{2n}+\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}+\frac{11}{12}\gamma.$$

1°. Soit d'abord $\gamma=0$. On aura

$$\Omega = \frac{72n\varphi}{36-(9\alpha+8\beta-36)n}$$

n étant $\gtreqless 5$, et $\Omega>0$ et $>2n\varphi$, $9\alpha+8\beta-36$ devra être >0 et <8. On aura donc

$$\alpha=3,\ \beta=2,\quad \text{d'où}\quad \Omega=\frac{72n\varphi}{36-7n},$$

$$\alpha=2,\ \beta=3,\quad \text{d'où}\quad \Omega=\frac{72n\varphi}{36-6n},$$

$$\alpha=1,\ \beta=4,\quad \text{d'où}\quad \Omega=\frac{72n\varphi}{36-5n},$$

ou enfin

$$\alpha=0,\ \beta=5,\quad \Omega=\frac{72n\varphi}{36-4n}.$$

D'ailleurs Ω étant divisible par $2n\varphi$ et $3n\varphi$, son dénominateur divisera 12, ce qui donnera les solutions suivantes

$$\alpha=3,\ \beta=2,\ n=5,\quad \Omega=72.5\varphi,$$
$$\alpha=2,\ \beta=3,\ n=5,\quad \Omega=60\varphi,$$
$$\alpha=1,\ \beta=4,\ n=6,\quad \Omega=72\varphi,$$
$$\alpha=1,\ \beta=4,\ n=7,\quad \Omega=72.7\varphi,$$
$$\alpha=0,\ \beta=5,\ n=6,\quad \Omega=36\varphi,$$
$$\alpha=0,\ \beta=5,\ n=8,\quad \Omega=72.2\varphi.$$

2°. Soit $\gamma>0$, ce qui entraîne forcément $\alpha\gtreqless 2$.

Si $\gamma>2$, Ω sera négatif. De même si $\gamma=2$, à moins qu'on n'ait $\alpha=2$, $\beta=0$. On trouvera dans ce cas

$$\Omega = \frac{72n\varphi}{36-4n}$$

et Ω étant divisible par $12n\varphi$, $36-4n$ devrait diviser 6, ce qui est absurde.

Si $\gamma=1$, il faudra, pour que Ω soit >0 et $>2n\varphi$, qu'on ait $\alpha=3$, $\beta=0$, ou $\alpha=2$, $\beta=1$.

On aura dans le premier cas

$$\Omega = \frac{72n\varphi}{36-2n}$$

et comme il est divisible par $12n$ et par 72, n devra être pair, et $36-2n$ diviser 6, ce qui est contradictoire.

Enfin si $\alpha = 2$, $\beta = 1$, on aura

$$\Omega = \frac{72n\varphi}{36-n}$$

et $36-n$ devant diviser 6, on aura les solutions

$$n = 30,\quad \Omega = 12.30\varphi,$$
$$n = 33,\quad \Omega = 24.33\varphi,$$
$$n = 34,\quad \Omega = 36.34\varphi,$$
$$n = 35,\quad \Omega = 72.35\varphi.$$

119. Supposons maintenant Σ exclusivement formé de termes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$, $\frac{1}{12}$.

Dixième cas: *Σ contient trois termes* $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{p'-1}{3p'}$, $\frac{p''-1}{3p''}$.

Soit S la somme des autres termes. On aura

$$1-\frac{p-1}{3p}-\frac{p'-1}{3p'}-\frac{p''-1}{3p''}-S>0$$

et comme p, p', p'' sont $\overline{\overline{>}}\, 7$, on aura *à fortiori*

$$1-3.\tfrac{2}{7}-S>0, \quad \text{d'où} \quad S<\tfrac{1}{7}.$$

D'autre part, $S>0$. Car si l'on avait $S=0$, on aurait

$$\Omega = \frac{\varphi}{\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}+\frac{1}{3p''}} < \frac{\varphi}{3p} < 3p\varphi,$$

ce qui est absurde.

On aura donc $S=\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{9}$.

1°. Si $S=\frac{1}{8}$, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{8}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p'}+\frac{1}{3p''}}.$$

Soit $p'' \overline{\overline{<}}\, p' \overline{\overline{<}}\, p$. On aura $-\frac{1}{8}+3.\frac{1}{3p''}>0$, d'où $p''<8$.

Donc

$$p'' = 7, \quad \Omega = \frac{\varphi}{-\frac{13}{168} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'}}.$$

On aura $-\frac{13}{168} + \frac{2}{3p'} > 0$, d'où $p' < 9$.

Donc

$$p' = 7, \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\varphi}{-\frac{5}{168} + \frac{1}{3p}} = \frac{168 p\varphi}{56-5p}.$$

Mais Ω doit être divisible par $7p\varphi$ et $3p\varphi$. Donc $56-5p$ divisera 8; ce qui est impossible.

2°. Si $S = \frac{1}{9}$, on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{9} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'} + \frac{1}{3p''}}.$$

Soit encore $p'' \overline{\overline{\lt}} p' \overline{\overline{\lt}} p$. On trouvera $p'' < 9$, d'où

$$p'' = 7, \quad \Omega = \frac{\varphi}{-\frac{4}{63} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'}}.$$

On trouvera ensuite $p' < \frac{2.63}{12}$, d'où $p' = 7$ ou 9. Si $p' = 7$, $\Omega = \frac{63 p\varphi}{21-p}$; et comme il est divisible par $3p\varphi$ et $7p\varphi$, $21-p$ divisera 3. D'où $p = 18$ ou 20, solutions inacceptables.

Si $p' = 9$, $\Omega = \frac{3.63 p\varphi}{63-5p}$; et comme il est divisible par $7p\varphi$ et $9p\varphi$, $63-5p$ divisera 3; on aura donc $p = 12$; d'où

$$\Omega = 63.12\varphi.$$

120. Onzième cas: *Σ ne contient que deux termes de l'espèce* $\frac{p-1}{3p}$.

Chacun de ces deux termes étant au moins égal à $\frac{2}{7}$, la somme S des termes restants sera $< \frac{3}{7}$. D'autre part, elle sera $> \frac{1}{3}$, sans quoi on aurait

$$\Omega = \frac{\varphi}{1 - \frac{p-1}{3p} - \frac{p'-1}{3p'} - S} < 3p\varphi.$$

Pour satisfaire à ces inégalités, il faudra qu'on ait

$$S = \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9} + \frac{1}{12}\gamma.$$

1°. Si $\gamma > 0$, d'où $\alpha \overline{\gtrless} 2$, ces inégalités ne pourront être satisfaites qu'en posant

$$\alpha = 2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1$$

d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{5}{12} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'}}.$$

Soit $p' \overline{\gtrless} p$. On aura $-\frac{5}{12} + \frac{2}{3p'} > 0$, d'où $p' < \frac{144}{15}$. Donc $p' = 7$, ou 9.

Si $p' = 7$, $\Omega = \frac{7.72p\varphi}{7.24 - 11p}$. D'ailleurs il est divisible par $7p\varphi$ et $12p\varphi$. Donc $7.24 - 11p$ divise 6; d'où $p = 15$, solution inacceptable.

Si $p' = 9$, $\Omega = \frac{3.72p\varphi}{72 - 7p}$; il est d'ailleurs divisible par $9p\varphi$ et $12p\varphi$. Donc $72 - 7p$ divise 6; d'où $p = 10$, solution inacceptable.

2°. Si $\gamma = 0$, les inégalités $S > \frac{1}{3} < \frac{3}{7}$ donnent

$$\beta = 2, \quad \alpha = 1 \quad \text{ou} \quad \beta = 1, \quad \alpha = 2 \quad \text{ou} \quad \beta = 0, \quad \alpha = 3.$$

Soit d'abord $\beta = 2$, $\alpha = 1$. On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{12} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'}}.$$

Soit $p' \overline{\gtrless} p$; on aura $-\frac{1}{12} + \frac{2}{3p'} > 0$, d'où $p' < 48$. D'autre part $p' > 24$, sans quoi on aurait $\Omega \overline{\gtrless} 3p\varphi$, ce qui est inadmissible.

On pourra donc poser $p' = 25$, 27, 28, 31, 36, 37, 39, 43.

Si $p' = 25$, on aura $\Omega = \frac{1800p\varphi}{600 - p}$ et comme Ω est divisible par $25p\varphi$, $3p\varphi$ et $4p\varphi$, $600 - p$ divisera 6; ce qui fournit comme seule solution acceptable la suivante:

$$p = 597, \quad \Omega = 600.597\varphi.$$

Si $p' = 27$, $\Omega = \frac{9.72p\varphi}{216 - p}$; et $216 - p$ divisera 6; ce qui ne fournit pour p aucune valeur acceptable.

Si $p' = 28$, $\Omega = \frac{7.72p\varphi}{168 - p}$; et $168 - p$ divisera 6; ce qui ne donne pour p aucune valeur acceptable.

Si $p' = 31$, $\Omega = \frac{72.31p\varphi}{24.31 - 7p}$, et $24.31 - 7p$ divisera 6; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

Si $p' = 36$, $\Omega = \frac{6.36 p \varphi}{72 - p}$; $72 - p$ divise 6; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

Si $p' = 37$, $\Omega = \frac{37.72 p \varphi}{37.24 - 13 p}$; $37.24 - 13p$ divise 6; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

Si $p' = 39$, $\Omega = \frac{13.72 p \varphi}{13.24 - 5 p}$; $23.24 - 5p$ divisera 6; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

Si $p' = 43$, $\Omega = \frac{43.72 p \varphi}{43.24 - 19 p}$; et le dénominateur divisera 24; ce qui ne donne aucune valeur acceptable.

3°. Soit $\gamma = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{36} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'}}.$$

Si $p' \leqq p$, on aura $-\frac{1}{36} + \frac{2}{3p'} > 0$, $p' < 24$. D'autre part $p' > 12$; sinon on aurait $\Omega \leqq 3p\varphi$. Donc $p' = 13$, 16, 19 ou 21.

Si $p' = 13$, $\Omega = \frac{13.36 p \varphi}{13.12 - p}$; le dénominateur divisera 6; ce qui ne donnera pour p aucune valeur admissible.

Si $p' = 16$, $\Omega = \frac{144 p \varphi}{48 - p}$; le dénominateur divisera 3; ce qui ne donne pour p aucune valeur admissible.

Si $p' = 19$, $\Omega = \frac{19.36 p \varphi}{19.12 - 7 p}$; le dénominateur doit diviser 6; ce qui ne donne aucune valeur admissible.

Si $p' = 21$, $\Omega = \frac{84 p \varphi}{28 - p}$; et $28 - p$ divisera 2. On pourra poser

$$p = 27, \quad \Omega = 84.27 \varphi.$$

4°. Soit enfin $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 3$, d'où

$$\Omega = \frac{\varphi}{-\frac{1}{24} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p'}}.$$

Si $p' \leqq p$, on aura $p' < 16 > 8$. D'où $p' = 9$, 12 ou 13.

Si $p' = 9$, $\Omega = \frac{9.24 p \varphi}{72 - p}$; et $72 - p$ divisera 6; ce qui ne donnera aucune solution acceptable.

Si $p' = 12$, $\Omega = \frac{72p\varphi}{24-p}$, et $24-p$ divisera 6; d'où l'on déduit $p = 21$, $\Omega = 24.21\varphi$. Mais on doit rejeter cette solution, Ω devant être divisible par $4p'\varphi$.

Enfin, si $p' = 13$, $\Omega = \frac{13.24p\varphi}{104-5p}$; et $104-5p$ divisera 8; ce qui ne donne aucune solution admissible.

121. Douzième cas: *Σ contient un seul terme de l'espèce* $\frac{p-1}{3p}$. Soit S la somme des autres termes; on aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{p-1}{3p}-S} = \frac{\varphi}{\frac{2}{3}-S+\frac{1}{3p}},$$

et comme $p \gtreqless 7$ et $\Omega > 0$, on aura $S < \frac{5}{7}$. D'autre part $\Omega > 3p\varphi$; d'où $S > \frac{2}{3}$.

S ne peut contenir aucun terme $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$; car s'il était seul, S serait $< \frac{2}{3}$; et si S contenait un autre terme, il serait $> \frac{5}{7}$.

On aura donc $S = \frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}+\frac{1}{12}\gamma$.

1°. Si $\gamma = 0$, il faudra, pour satisfaire aux inégalités ci-dessus, poser $\beta = 5$, $\alpha = 1$, ou $\beta = 4$, $\alpha = 2$ ou $\beta = 3 = \alpha$.

Si $\beta = 5$, $\alpha = 1$, on aura $\Omega = \frac{72p\varphi}{24-p}$; et $24-p$ divisera 6; ce qui donnera une seule solution acceptable

$$p = 21, \quad \Omega = 7.72\varphi.$$

Si $\beta = 4$, $\alpha = 2$, on aura $\Omega = \frac{36p\varphi}{12-p}$, et $12-p$ divisera 6; d'où

$$p = 9, \quad \Omega = 36.3\varphi.$$

Si $\beta = 3$, $\alpha = 3$, on aura $\Omega = \frac{24p\varphi}{8-p}$, d'où $p = 7$, $\Omega = 24.7\varphi$, solution absurde, Ω devant être divisible par 9φ.

2°. Si $\gamma = 1$, d'où $\alpha \gtreqless 2$, les inégalités $S > \frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ seront contradictoires.

3°. Si $\gamma = 2$, ces inégalités donneront $\alpha = 3$, $\Omega = \frac{72p\varphi}{24-p}$; et $24-p$ diviserait 6, d'où $p = 21$, $\Omega = 7.72\varphi$; solution absurde, car Ω devrait être divisible par 12.12φ.

4°. Si $\gamma > 2$, on aura nécessairement $\gamma = 3$, $\alpha = 2$, $\Omega = \frac{24p\varphi}{8-p}$, d'où $p = 7$, $\Omega = 24.7\varphi$; solution à rejeter, Ω devant être divisible par 12.12φ.

122. Il reste à discuter les cas où Σ ne contient que des termes $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$, $\frac{1}{12}$. Il ne peut évidemment contenir plus d'un terme de la première forme.

Treizième cas: *Σ contient un terme* $\frac{q-1}{6q}+\frac{1}{2}$.

On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{\frac{1}{3}-S+\frac{1}{6q}},$$

et comme $q \overline{\geqq} 9$, on aura

$$S < \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{54} < \tfrac{19}{54}.$$

D'autre part, Ω étant $> 6q\varphi$, on aura

$$S > \tfrac{1}{3}.$$

S ne peut contenir de terme $\frac{1}{12}$; car il serait accompagné d'un terme $\frac{1}{4}$, et S serait $> \frac{19}{54}$; donc S sera de la forme $\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{9}$; et l'on voit aisément qu'on doit avoir $\alpha = 1$, $\beta = 2$,

$$\Omega = \frac{72q\varphi}{12-q},$$

$12-q$ divisant 12; d'où

$$q = 9, \quad \Omega = 72.3\varphi.$$

123. Quatorzième cas: *Σ ne contient que des termes* $\frac{1}{12}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{9}$.

On aura

$$\Omega = \frac{\varphi}{1-\frac{\alpha}{8}-\frac{\beta}{9}-\frac{1}{12}\gamma} = \frac{72\varphi}{r},$$

r étant un entier.

Donc Ω sera un diviseur de 72φ. D'ailleurs on aura $\gamma = 0$. Sans quoi H se confondrait avec le groupe K d'ordre 72φ, formé par celles de ses substitutions qui sont permutables à celles du faisceau F d'où provient le terme $\frac{1}{12}$; ce serait donc un des groupes déjà étudiés.

124. Les solutions obtenues peuvent être récapitulées dans le tableau suivant:

(I.)	$\Sigma = \frac{15}{24}+\frac{4}{27}+\frac{2}{9}$.		$\Omega = 8.27\varphi$
(II.)	$\Sigma = \frac{15}{24}+\frac{2}{8}+\frac{1}{9}$,		$\Omega = 72\varphi$.
(III.)	$\Sigma = \frac{65}{96}+\frac{p-1}{3p}$,	$p = 31$,	$\Omega = 96.31\varphi$.
(IV.)	$\Sigma = \frac{m-1}{m}+\frac{1}{8}$,	$m = 6$,	$\Omega = 24\varphi$.

(V.)	$\Sigma = \frac{m-1}{m} + \frac{1}{8}$,	$m = 7$,	$\Omega = 56\varphi$.
(VI.)	$\Sigma = \frac{m-1}{m} + \frac{1}{9}$,	$m = 6$,	$\Omega = 18\varphi$.
(VII.)	$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{n'-1}{2n'} + \frac{1}{8}$,	$n' = 7,\ n = 8$,	$\Omega = 2.7.8\varphi$.
(VIII.)	id.	$n' = 6,\ n = 8$,	$\Omega = 48\varphi$.
(IX.)	id.	$n' = 6,\ n = 10$,	$\Omega = 120\varphi$.
(X.)	id.	$n' = 6,\ n = 11$,	$\Omega = 4.6.11\varphi$.
(XI.)	id.	$n' = 5,\ n = 16$,	$\Omega = 160\varphi$.
(XII.)	id.	$n' = 5,\ n = 18$,	$\Omega = 360\varphi$.
(XIII.)	id.	$n' = 5,\ n = 19$,	$\Omega = 8.5.19\varphi$.
(XIV.)	$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{n'-1}{2n'} + \frac{1}{9}$,	$n' = 8,\ n = 10$,	$\Omega = 9.8.10\varphi$.
(XV.)	id.	$n' = 7,\ n = 12$,	$\Omega = 6.7.12\varphi$.
(XVI.)	id.	$n' = 6,\ n = 12$,	$\Omega = 72\varphi$.
(XVII.)	id.	$n' = 6,\ n = 15$,	$\Omega = 180\varphi$.
(XVIII.)	id.	$n' = 6,\ n = 16$,	$\Omega = 18.16\varphi$.
(XIX.)	id.	$n' = 6,\ n = 17$,	$\Omega = 36.17\varphi$.
(XX.)	id.	$n' = 5,\ n = 42$,	$\Omega = 6.5.42\varphi$.
(XXI.)	id.	$n' = 5,\ n = 44$,	$\Omega = 18.5.44\varphi$.
(XXII.)	$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'}$,	$n = 6,\ p' = 7,\ p = 9$,	$\Omega = 3.28.9\varphi$.
(XXIII.)	$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{p-1}{3p} + \frac{2}{8}$,	$n = 12,\ p = 7$,	$\Omega = 24.7\varphi$.
(XXIV.)	$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{p-1}{3p} + \frac{2}{9}$,	$p = 7,\ n = 60$,	$\Omega = 42.60\varphi$.
(XXV.)	id.	$p = 7,\ n = 62$,	$\Omega = 126.62\varphi$.
(XXVI.)	id.	$p = 12,\ n = 15$,	$\Omega = 12.15\varphi$.
(XXVII.)	id.	$p = 12,\ n = 17$,	$\Omega = 36.17\varphi$.
(XXVIII.)	id.	$p = 21,\ n = 12$,	$\Omega = 72.7\varphi$.
(XXIX.)	id.	$p = 57,\ n = 10$,	$\Omega = 60.57\varphi$.
(XXX.)	$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{p-1}{3p} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$,	$p = 9,\ n = 15$,	$\Omega = 72.15\varphi$.
(XXXI.)	$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}$,	$\alpha = 3,\ \beta = 2,\ n = 5$,	$\Omega = 72.5\varphi$.
(XXXII.)	id.	$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ n = 5$,	$\Omega = 60\varphi$.
(XXXIII.)	id.	$\alpha = 1,\ \beta = 4,\ n = 6$,	$\Omega = 72\varphi$.
(XXXIV.)	id.	$\alpha = 1,\ \beta = 4,\ n = 7$,	$\Omega = 72.7\varphi$.
(XXXV.)	id.	$\alpha = 0,\ \beta = 5,\ n = 6$,	$\Omega = 36\varphi$.
(XXXVI.)	id.	$\alpha = 0,\ \beta = 5,\ n = 8$,	$\Omega = 72.2\varphi$.

(XXXVII.)	$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{2}{8} + \frac{1}{9} + \frac{11}{12}$,	$n = 30$,	$\Omega = 12.30\varphi$.
(XXXVIII.)	id.	$n = 33$,	$\Omega = 24.33\varphi$.
(XXXIX.)	id.	$n = 34$,	$\Omega = 36.34\varphi$.
(XL.)	id.	$n = 35$,	$\Omega = 72.35\varphi$.
(XLI.)	$\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'} + \frac{p''-1}{3p''} + \frac{1}{9}$,	$p''=7,\ p'=9,\ p=12$,	$\Omega = 63.12\varphi$.
(XLII.)	$\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9}$,	$p'=25,\ p=597$,	$\Omega = 600.597\varphi$.
(XLIII.)	$\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'} + \frac{2}{8} + \frac{1}{9}$,	$p'=21,\ p=27$,	$\Omega = 84.27\varphi$.
(XLIV.)	$\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}$,	$\alpha = 1,\ \beta = 5,\ p = 21$,	$\Omega = 7.72\varphi$.
(XLV.)	id.	$\alpha = 2,\ \beta = 4,\ p = 9$,	$\Omega = 36.3\varphi$.
(XLVI.)	$\Sigma = \frac{q-1}{6q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9}$,	$q = 9$,	$\Omega = 72.3\varphi$.
(XLVII.)	$\Sigma = \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{9}$,		$\Omega =$ diviseur de 72φ.

§. 3. Discussion des solutions. — Construction des groupes d'ordre fini.

125. Il nous reste à discerner, parmi les solutions précédentes, celles qui donnent lieu effectivement à des groupes d'ordre fini, et à construire ces groupes.

Nous distinguerons à cet effet, les groupes à construire en groupes *simples* et groupes *composés*.

Nous dirons qu'un groupe H, d'ordre $M\varphi$, est composé, s'il contient un groupe moindre h, d'ordre $m\varphi$ (contenant lui-même Φ) et auquel ses substitutions soient permutables.

Cette définition établie, nous procéderons de la manière suivante:

Nous construirons d'abord les divers groupes simples H, d'ordre fini; nous les joindrons aux groupes du N°. 62.

Nous chercherons ensuite les groupes qui contiennent les précédents, et sont permutables à leurs substitutions, ce qui nous donnera une première classe de groupes composés.

Nous formerons ensuite les groupes qui contiennent ceux-ci et sont permutables à leurs substitutions; et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous n'obtenions plus de nouveaux groupes.

126. Soit H un groupe simple et d'ordre $M\varphi$. Une fonction linéaire fractionnaire à coefficients indéterminés:

$$\frac{ax+by+cz}{a'x+b'y+c'z}$$

étant évidemment invariable par les substitutions de Φ, prendra M valeurs distinctes par les substitutions de H. Elle dépendra donc d'une équation $X=0$ de degré M. Chaque substitution de H permutera ses racines les unes dans les autres, et correspondra à une substitution opérée entre ces racines. Ces dernières substitutions formeront évidemment un groupe H' d'ordre M, et isomorphe à H.

Si le groupe H est simple, H' sera lui-même simple, c'est-à-dire ne contiendra aucun groupe moindre permutable à ses substitutions. Car s'il contenait un semblable groupe J' d'ordre m, le groupe J d'ordre $m\varphi$, formé par les substitutions de H qui correspondent à celles de J', serait évidemment permutable aux substitutions de H.

Cela posé, soient I un groupe d'ordre $N\varphi$ contenu dans H; I' le groupe d'ordre N formé par les substitutions correspondantes de H'; une fonction des racines de X, invariable par les substitutions de I' et variable par toute autre substitution dépendra, comme on sait, d'une équation réduite Y de dégré $\frac{M}{N}$, et dont le groupe H'', isomorphe à H', sera simple comme lui, et aura pour ordre M.

127. On peut déduire immédiatement de ces remarques l'impossibilité de l'existence de groupes simples correspondants à la plupart des solutions du tableau précédent.

Théorème. *Il n'existe aucun groupe simple d'ordre* $8.27\varphi = 3.72\varphi$.

Le groupe correspondant H' serait en effet d'ordre 8.27. Il contiendrait un groupe I' d'ordre 27 (*Sylow*). La réduite correspondante Y aurait pour degré 8; son groupe H'' aurait pour ordre 8.27, ce qui est absurde, cet ordre devant diviser $1.2.3\ldots 8$.

128. Théorème. *Il n'existe aucun groupe simple d'ordre* 72φ.

Car H', ayant pour ordre 72, contiendrait un groupe I' d'ordre 9. La réduite Y aura pour degré 8; son groupe H'' serait simple, et d'ordre 8.9; ce qu'on sait être impossible, d'après l'énumération des groupes de 8 lettres faite par divers géomètres.

129. Théorème. *Il n'existe aucun groupe simple d'ordre* 6φ, 12φ, 24φ, 56φ, 18φ, $2.7.8\varphi$, 48φ, 160φ, 18.16φ, 36φ, 18φ, 36.3φ.

On raisonnera de même, en prenant pour I' le groupe d'ordre 3, 4, 8, 8, 9, 16, 16, 32, 32, 9, 9 ou 27 contenu dans H'.

130. Théorème. *La solution* (IX.) *ne peut donner de groupe simple.*

En effet H contient un groupe d'ordre $2n\varphi = 20\varphi$; donc H' contiendra un groupe I' d'ordre 20. La réduite Y sera de degré 6; et son groupe H'' contiendrait un faisceau F'' de 10 substitutions échangeables entre elles, correspondantes à celles du faisceau F d'ordre $n\varphi$ que contient H; F'' devrait contenir une substitution d'ordre 5, et une substitution binaire qui lui fût échangeable, ce qui est évidemment absurde dans un groupe de 6 lettres.

131. Théorème. *La solution* (X.) *ne peut donner de groupe simple.*

Car H contient un groupe d'ordre 2.11φ; H' un groupe d'ordre 2.11. La réduite Y serait de degré 12; et l'on sait qu'il n'existe aucun groupe entre 12 lettres et d'ordre 12.11.2.

132. Théorème. *Les solutions* (XVII.) *et* (XXVI.) *ne donnent aucun groupe simple.*

Car on aurait une réduite Y de degré 6 et dont le groupe contiendrait un faisceau F'' de 15 substitutions échangeables entre elles, ce qui est absurde (N°. 130.)

133. Théorème. *La solution* (XX.) *ne donne aucun groupe simple.*

Car H' contient un groupe I' d'ordre 2.42; la réduite Y sera de degré 15, et son groupe aurait pour ordre 15.2.42. Il contiendrait un faisceau F'' de 42 substitutions échangeables entre elles, dont l'une S d'ordre 7 et à 2 cycles (s'il n'y en avait qu'un, F' contiendrait le groupe alterné et n'aurait pas pour ordre 15.2.42). Or les substitutions entre 15 lettres échangeables à une telle substitution S sont en nombre $2.7 < 42$.

134. Théorème. *La solution* (XXIII.) *ne donne aucun groupe simple.*

Car H' contenant un groupe d'ordre 2.12 on aurait une réduite Y de degré 7 et dont le groupe H'' aurait pour ordre 24.7. Or le seul groupe entre 7 lettres qui soit de cet ordre est le groupe linéaire

$$\left|\begin{matrix} x & ax+by+cz \\ y & a'x+b'y+c'z \\ z & a''x+b''y+c''z \end{matrix}\right| \quad \text{mod. } 2$$

lequel ne contient pas de faisceau F'' de 12 substitutions échangeables entre elles, comme cela devrait être.

135. Théorème. *Les solutions* (XXVIII.) *et* (XLIV.) *ne donnent aucun groupe simple.*

Car on aurait une réduite Y de degré 8, dont le groupe aurait pour ordre [illegible]2.7, ce qui n'est pas possible.

136. Théorème. ***Les solutions*** (XXIX.), (XXXVIII.), (XXXIX.), (XLII.) ***ne donnent aucun groupe simple.***

Prenons pour exemple la solution (XXIX.).

On aurait une réduite d'ordre 20, dont le groupe H'' contiendrait un faisceau F'' formé de $57 = 3.19$ substitutions échangeables entre elles. L'une d'elles serait circulaire et d'ordre 19. Mais les substitutions échangeables à une telle substitution dans un groupe de 20 lettres se réduisent à ses puissances, en nombre $19 < 57$.

137. Théorème. ***La solution*** (XXXVII.) ***ne donne aucun groupe simple.***

Car on aurait une réduite d'ordre 6, dont le groupe, ayant pour ordre 360, serait alterné. Il devrait contenir un faisceau de 30 substitutions échangeables entre elles, ce qui est évidemment impossible.

138. Théorème. ***Il n'existe aucun groupe simple d'ordre*** 9φ, 8φ, ou 4φ.

Car le groupe correspondant H', d'ordre 9, 8 ou 4, ayant pour ordre une puissance d'un nombre premier, ne peut être simple (***Sylow,*** Mathematische Annalen T. V).

139. Théorème. ***La solution*** (XXXVI.) ***ne fournit aucun groupe simple.***

Car on aurait une réduite d'ordre 9, dont le groupe serait simple, et d'ordre 72.2. Mais il n'existe aucun semblable groupe (Comptes Rendus, 23 X[bre] 1872).

140. Théorème. ***La solution*** (XIII.) ***ne fournit aucun groupe simple.***

En effet H' contient un groupe d'ordre 19.2 et l'on aura une réduite Y de degré 20 et d'ordre 20.19.2. Son groupe H'' contient un groupe d'ordre 19.2, dérivé d'une substitution circulaire d'ordre 19 et d'une substitution binaire qui lui est permutable. Cette dernière substitution contenant 9 cycles, n'appartiendra pas au groupe alterné. Cela posé, le groupe H'' de l'équation Y sera permutable au groupe d'ordre moitié moindre formé par celles de ses substitutions qui appartiennent au groupe alterné. Il ne sera donc pas simple.

141. Théorème. ***La solution*** (XXV.) ***ne fournit aucun groupe simple.***

On aura en effet une réduite Y de degré 63 et dont le groupe H'' devrait être simple et d'ordre 126.62. Il doit être primitif; sinon on aurait une réduite de degré diviseur de 63 et dont l'ordre ne pourrait être divisible par 31. D'ailleurs il doit contenir un faisceau F'' d'ordre 62 et dont les substitutions sont échangeables. L'une d'elles est d'ordre 31; elle aura

deux cycles, sinon H'' serait 32 fois transitif (Voir notre Traité des Substitutions, Note C), et n'aurait pas pour ordre 126.62. H'' contient en outre une substitution binaire échangeable à celle-là, laquelle aura 31 cycles, et n'appartiendra pas au groupe alterné. Donc F'' ne sera pas simple.

142. Théorème. *La solution* (XL.) *ne peut donner de groupe simple.*

On aura en effet une réduite Y de degré 36, dont le groupe H'', d'ordre 72.35, contient un faisceau F'' formé de 35 substitutions échangeables entre elles, et d'une substitution binaire qui est permutable au groupe des précédentes.

F'' contient une substitution S d'ordre 7, qui aura nécessairement 5 cycles si H'' est primitif; sinon H'' contiendrait le groupe alterné (Bulletin de la Société Mathématique de France T. I, page 221). Il contient en outre une substitution T d'ordre 5 échangeable à celle-là, et qui par suite devra permuter les cinq cycles. Il contiendra ST, qui sera circulaire d'ordre 35. Il contient enfin une substitution binaire U permutable au groupe formé par les puissances de ST. U aura 17 cycles, et n'appartiendra pas au groupe alterné; donc H'' ne sera pas simple.

D'autre part, si H'' n'était pas primitif, on aurait une réduite Z, d'un degré diviseur de 36. Si ce degré était 18 ou 12, l'ordre de son groupe ne pourrait être divisible par 7 sans qu'il contînt le groupe alterné (Bulletin de la Société mathématique de France T. I, page 41). Cet ordre ne peut donc être égal à 72.35. Il en est évidemment de même si le degré de Z est < 7. Enfin si le degré de Z est 9, l'ordre de son groupe ne pourrait être divisible par 5 sans qu'il contînt le groupe alterné.

143. Théorème. *La solution* (XV.) *ne donne aucun groupe simple.*

Nous aurons en effet une réduite Y de degré 21 et d'ordre 21.12.2. Adjoignons-nous une de ses racines. L'équation Z de degré 20 qui nous reste a pour ordre 12.2. Son groupe G contient un groupe Γ d'ordre 3; et d'après la formule de *Sylow*, on aura $12.2 = 3\beta(3\alpha+1)$, 3β étant l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à Γ; mais on a $3\beta \gtreqless 12$; donc $3\beta = 12.2$, $\alpha = 0$ et le groupe Γ sera unique. Il est formé des puissances d'une substitution d'ordre 3, laquelle laissera immobiles au moins deux racines de l'équation Z. On en déduit (Traité des Substitutions N°. 399) que X n'est pas primitive. On aura donc une réduite nouvelle, ayant pour degré un diviseur de 21, et dont l'ordre ne pourra être égal à 6.7.12, comme on s'en assure aisément.

144. Théorème. *La solution* (XXIV.) *ne donne aucun groupe simple.*

On aurait en effet une réduite Y de degré 21, dont le groupe contient un faisceau F' de 60 substitutions échangeables entre elles. L'une S de ces substitutions sera d'ordre 5, et contiendra 4 cycles si Y est primitive.

Les substitutions échangeables à S s'obtiennent en combinant ses puissances avec les permutations qu'on peut effectuer sur ces 4 cycles. Pour que F'' contînt 60 substitutions, il faudrait donc que parmi les 1.2.3.4 permutations de ces cycles on pût en trouver un groupe de 12 échangeables entre elles, ce qui est évidemment impossible.

Si Y n'était pas primitive, on aurait une autre réduite de degré 3 ou 7 dont le groupe devrait contenir un faisceau de 60 substitutions échangeables entre elles, ce qui est évidemment impossible.

145. Théorème. *Les solutions* (XIX.) *et* (XXVII.) *ne donnent aucun groupe simple.*

On aurait en effet une réduite Y de degré 18 et dont le groupe H'' aurait pour ordre 18.17.2. Celles des substitutions de F'' qui laissent une racine immobile formeront un groupe G d'ordre 17.2, dérivé d'une substitution circulaire S d'ordre 17 et d'une substitution binaire permutable à S; ses substitutions déplaceront toutes au moins 16 racines.

Cela posé, H'' contient un faisceau formé de 6 (ou 12) substitutions échangeables entre elles. Ce faisceau contiendra une substitution d'ordre 3 et une d'ordre 2, dont le produit sera une substitution T d'ordre 6.

Les cycles de T seront d'ordre 2, 3 ou 6. Mais si l'un d'eux était d'ordre 3, T^3 laisserait au moins 3 racines immobiles, et par suite en déplacerait moins de 16. Donc ils seront d'ordre 2 ou 6. Cela posé, T contiendra 3 cycles d'ordre 6; sinon T^2 ne pourrait déplacer plus de 12 racines. Mais alors T n'appartiendra pas au groupe alterné. Donc H'' ne sera pas simple.

146. Théorème. *La solution* (XII.) *ne fournit aucun groupe simple.*

On aurait en effet une réduite Y de degré 10, et d'ordre 10.18.2. En s'adjoignant une de ses racines, il resterait une équation de degré 9, dont le groupe G, d'ordre 18.2, contiendrait un groupe Γ de 18 substitutions échangeables entre elles.

Soit Δ le groupe d'ordre 9 formé par celles des substitutions de Γ qui ont pour ordre une puissance de 3. Ce groupe Δ ne pourra être exclusivement formé de substitutions déplaçant 6 racines.

En effet, supposons qu'il en fût ainsi: et soit $S=(abc)(a'b'c')$ une

des substitutions de Δ; a'', b'', c'' les trois racines restantes. Δ contiendrait une autre substitution ternaire T, autre que les puissances de S, échangeable à S et déplaçant 6 lettres. On aurait évidemment $T = U(a''b''c'')$, U étant une puissance de l'une des deux substitutions circulaires (abc), $(a'b'c')$; et il est clair que ST ou ST^2 déplacera les 9 racines.

Cela posé, deux cas seront à distinguer: 1°. Si Δ contient une substitution qui déplace les 9 racines, cette substitution elle-même, ou son cube, sera de la forme

$$V = (abc)(a'b'c')(a''b''c'').$$

Or les substitutions échangeables à V sont en tout en nombre 18, mais ne sont pas toutes échangeables entre elles.

2°. Si Δ contenait une substitution circulaire ternaire, H'' contiendrait le groupe alterné, et par suite aurait un ordre supérieur à $10.18.2$; ou bien Y ne serait pas primitive, et l'on aurait une nouvelle réduite Z de degré 2 ou 5, qui ne pourrait avoir pour ordre $10.18.2$.

147. Théorème. *La solution* (XXX.) *ne peut fournir de groupe simple.*

On aurait en effet une réduite Y de degré 36 et d'ordre 36.30. Le groupe d'ordre 30 formé par celles des substitutions de H'' qui laissent une racine immobile, ayant 15 substitutions échangeables entre elles, contiendrait d'après le théorème de M. *Sylow* un seul groupe d'ordre 3. Parmi les 35 racines qui restent, 2 au moins resteraient immobiles par la substitution S d'ordre 3 dont les puissances forment ce groupe. Soit plus généralement $3k-1$ le nombre de ces racines immobiles; Y ne sera pas primitive, et ses racines se grouperont $3k$ à $3k$ en systèmes. (Traité des Substitutions N°. 399). On aura donc une nouvelle réduite Z de degré $\frac{12}{k}$, et dont le groupe devrait contenir un faisceau de 15 substitutions échangeables entre elles; ce qui est évidemment impossible, à moins qu'on n'ait $k = 1$ et que le faisceau ne contienne une substitution circulaire d'ordre 5. Mais alors Z serait elle-même non primitive, ou son groupe contiendrait le groupe alterné, et n'aurait pas pour ordre 36.30.

148. Théorème. *La solution* (XXI.) *ne peut donner de groupe simple.*

On aurait une réduite Y de degré 45 et d'ordre $45.44.2$. Celles des substitutions de H'' qui laissent une racine immobile forment un groupe Γ d'ordre 44.2 contenant un faisceau Δ de 44 substitutions échangeables entre elles. Δ contiendra une substitution S d'ordre 11, qui aura 4 cycles.

Car si elle en avait moins, H'' contiendrait le groupe alterné, ce qui est inadmissible, ou serait non primitif. On aurait dans ce dernier cas une nouvelle réduite, de degré diviseur de 45, et dont l'ordre ne pourra être divisible par 11 que si son degré est 15 et si son groupe contient le groupe alterné (Bulletin de la Société mathématique T. I page 41), ce qui est inadmissible.

Donc S aura 4 cycles; et Δ sera formé de la combinaison de S avec des substitutions dont l'ordre est une puissance de 2, lesquelles, étant échangeables à S, permuteront ses cycles, et laisseront immobiles les lettres des cycles qu'elles ne déplacent pas.

Si l'une T de ces substitutions ne déplaçait que 2 cycles, elle déplacerait en tout 22 lettres et n'appartiendrait pas au groupe alterné. Donc H'' ne serait pas simple.

Donc les 43 substitutions de Δ, autres que l'unité, déplacent toutes les racines.

Or nous avons démontré (Journal de Liouville 2e série T. XVII) la proposition suivante.

Soient** G **un groupe transitif entre** m **lettres;** H **le groupe de degré** $m-1$ **formé par celles de ses substitutions qui laissent une lettre immobile;** N_x **le nombre des substitutions de** H **qui ne déplacent que** x **lettres;** M **le nombre des substitutions de** G **qui déplacent toutes les lettres; on aura la formule

$$M = m\left(\tfrac{1}{2}N_{m-2}+\tfrac{2}{3}N_{m-3}+\cdots+\frac{m-1}{m}N_0\right).$$

Appliquons cette formule au groupe H''. On aura $m=45$,

$$N_{m-1}+N_{m-2}+\cdots+N_0 = 44.2.$$

On vient de voir que $N_{m-1} \gtreqless 43$. D'autre part N_0 est évidemment égal à 1. On aura donc

$$N_{m-2}+N_{m-3}+\cdots+N_1 \lesseqgtr 44$$

et par suite

$$\begin{aligned} M &= 45\{\tfrac{1}{2}N_{m-2}+\tfrac{2}{3}N_{m-3}+\cdots+\tfrac{44}{45}\} \\ &< 45\{N_{m-2}+N_{m-3}+\cdots+\tfrac{44}{45}\} < 45\{44+\tfrac{44}{45}\} \\ &< 44.46. \end{aligned}$$

Mais d'autre part, le groupe H contient un faisceau F d'ordre 5, dont les transformés fournissent $\frac{5-1}{2.5}\Omega$ substitutions distinctes, et un faisceau

F_1 d'ordre 3 dont les transformés fournissent $\frac{1}{3}\Omega$ substitutions distinctes. Les substitutions correspondantes dans H'' seront d'ordre 5 et 3, et déplaceront toutes les racines, car l'ordre du groupe Γ formé des substitutions qui laissent une racine immobile n'est divisible ni par 5 ni par 3. Le nombre de ces substitutions est d'ailleurs égal à $\frac{4}{10}+\frac{1}{3}$ du total. On devra donc avoir

$$(\tfrac{4}{10}+\tfrac{1}{3}).45.44.2 \gtreqless M < 44.46,$$

équation absurde.

149. Théorème. *La solution* (XXXIV.) *ne fournit aucun groupe simple.*

On a en effet dans cette solution $\Sigma = \frac{n-1}{2n}+\frac{1}{8}+\frac{2}{3}$ et $n=7$. Le premier terme de cette somme résulte de l'énumération des substitutions transformées de celles d'un certain faisceau F d'ordre 7φ (N°. 74). Le terme $\frac{2}{3}$ résulte de l'énumération des transformées des substitutions de certains faisceaux $F_1, \dots$ d'ordre 3φ ou 9φ (id.). Enfin le terme $\frac{1}{8}$ résulte de l'énumération des transformées de certaines substitutions d'un faisceau $\mathfrak{F}$ d'ordre 4φ (N°. 95) et dont les substitutions auront pour forme canonique

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

où a, b, c sont égaux au signe près. Or 3φ et 9φ sont impairs. Donc celles des substitutions de H dont l'ordre est une puissance de 2 appartiendront à $\mathfrak{F}$ ou à ses transformés; et leur carré multipliant x, y, z par un même facteur, appartiendra à Φ, et par suite se réduira à l'unité (sinon il aurait pour ordre 3 et non une puissance de 2). Toutes ces substitutions seront donc d'ordre 2.

Cette conséquence est absurde. En effet, H ayant pour ordre 72.7φ, contiendra un groupe G d'ordre 8, dont une substitution sera échangeable à toutes les autres (*Sylow,* Mathematische Annalen, T. V).

Soit

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

cette substitution; a, b, c devant être, par hypothèse, égaux à ± 1, et le déterminant abc étant égal à 1, on pourra poser

$$S = |x, y, z \quad -x, -y, z|.$$

Soit T une seconde substitution de G, différente de S et de l'unité. Elle sera de la forme

$$T = |x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \quad \alpha' x+\beta' y, \gamma z|$$

et l'on pourra disposer des variables x, y de manière à la ramener elle aussi à sa forme canonique

$$T = |x, y, z \quad ax, by, cz|.$$

D'ailleurs a, b, c doivent être égaux à ± 1, et $abc = 1$; on pourra donc supposer

$$T = |x, y, z \quad x, -y, -z|.$$

Les substitutions S et T, combinées entre elles, donneront un groupe g d'ordre 4; et G résultera de la combinaison de g avec une nouvelle substitution qui lui soit permutable. Cette substitution U, étant en même temps d'ordre 2 et échangeable à S, sera de l'une des deux formes

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|,$$
$$|x, y, z \quad ay, bx, cz|.$$

Si elle était de la première forme, elle appartiendrait évidemment à g; si elle est de la seconde forme, on aura nécessairement $ab = c = -1$.

Cela posé, G contiendra la substitution TU, laquelle est évidemment d'ordre 4.

150. Il ne nous reste plus à discuter que les solutions (III.), (XIV.), (XXII.), (XXXI.), (XXXII.), (XLI.), (XLIII.).

Théorème. ***La solution*** (III.) ***ne peut fournir aucun groupe.***

On aurait en effet

$$\Sigma = \tfrac{65}{96} + \frac{n-1}{3n}, \quad \text{avec} \quad n = 31.$$

Et H contiendrait un faisceau F d'ordre 31φ (fournissant le terme $\frac{n-1}{3n}$), lequel résulterait de la combinaison de Φ avec une substitution S d'ordre 31, ayant pour forme canonique

$$|x, y, z \quad \tau x, \tau^{\mu} y, \tau^{\nu} z|$$

où τ est une racine 31ème de l'unité.

Le groupe I formé des substitutions de H permutables à F, ayant pour ordre $3n\varphi$, contiendra une substitution T de la forme

$$(72.) \qquad |x, y, z \quad ay, bz, cx|$$

qui devra transformer S en une de ses puissances. Cette transformée étant

$$|x, y, z \quad \tau^{\mu} x, \tau^{\nu} y, \tau z|$$

on aura les conditions

$$\tau^{\nu} = \tau^{\mu^2}, \quad \tau = \tau^{\nu\mu} = \tau^{\mu^3},$$

d'où

$$\mu^3 \equiv 1, \quad \nu \equiv \mu^2 \quad \text{mod. } 31.$$

D'ailleurs $\tau^{1+\mu+\nu} = 1$, d'où $1+\mu+\nu \equiv 0 \text{ mod. } 31$. Donc μ et ν seront respectivement égaux à 5 et 25.

Les substitutions de Φ étant d'ailleurs de la forme

$$|x, y, z \quad \theta^\varrho x, \theta^\varrho y, \theta^\varrho z|$$

où θ est une racine cubique de l'unité, celles de F auront pour forme générale

$$(73.) \qquad |x, y, z \quad \theta^\varrho \tau^\mu x, \theta^\varrho \tau^{5\mu} y, \theta^\varrho \tau^{25\mu} z|.$$

151. Les faisceaux contenus dans H, autres que F et ses transformés, seront contenus (N°s. 79 à 82) dans un groupe K, dont on pourra, par un choix de variables convenable, mettre les substitutions sous la forme

$$|x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z|.$$

Le groupe K' formé par les substitutions

$$|x, y \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y|$$

sera octaédrique, et celles de ses substitutions en nombre ω qui multiplient x et y par un même facteur résulteront de la combinaison des substitutions

$$|x, y \quad \theta^\varrho x, \theta^\varrho y|$$

correspondantes à celles de Φ avec les puissances de la substitution

$$|x, y \quad j^2 x, j^2 y|$$

où j est une racine huitième de l'unité. Les faisceaux contenus dans K' seront les transformés de trois d'entre eux, respectivement formés de la combinaison des ω substitutions précédentes, avec les puissances d'une substitution

$$|x, y \quad ntx, nt^{-1}y|$$

où t est racine primitive de l'une des équations $t^4 = 1$, $t^6 = 1$, $t^8 = 1$, n se réduisant à l'unité si $t^6 = 1$, à j dans les deux autres cas.

Les substitutions du premier faisceau, où $t^4 = 1$, seront évidemment contenues dans la forme suivante

$$|x, y \quad j^\alpha \theta^\varrho x, j^\beta \theta^\varrho y|.$$

De même pour celles du troisième faisceau, où $t^8 = 1$.

Pour le second faisceau, où $t^6 = 1$, on remarquera que $t = -\theta = j^4\theta$, et $n = 1$. Ses substitutions seront donc de la forme

$$|x, y \quad \theta^\varrho j^{2\gamma} \theta^\delta x, \theta^\varrho j^{2\gamma} \theta^{-\delta} y|.$$

Les substitutions de K correspondantes à celles de K' auront donc pour forme canonique l'une des deux suivantes

$$(74.)\quad |x,\ y,\ z\quad j^{\alpha}\theta^{\rho}x,\ j^{\beta}\theta^{\rho}y,\ j^{-\alpha-\beta}\theta^{\rho}z|,$$

$$(75.)\quad |x,\ y,\ z\quad \theta^{\rho}j^{2\gamma}\theta^{\delta}x,\ \theta^{\rho}j^{2\gamma}\theta^{-\delta}y,\ \theta^{\rho}j^{-4\gamma}z|.$$

152. Toute substitution de H étant la transformée de l'une des substitutions précédentes, aura même forme canonique, à savoir l'une des formes (73.), (74.), (75.).

Si elle a la forme canonique (73.), la somme des racines de son équation caractéristique sera

$$(76.)\quad \theta^{\rho}(\tau^{\mu}+\tau^{5\mu}+\tau^{25\mu}).$$

Si elle a la forme canonique (74.), la somme de ces racines sera

$$(77.)\quad \theta^{\rho}(j^{\alpha}+j^{\beta}+j^{-\alpha-\beta}).$$

Si elle a la forme canonique (75.), cette somme sera

$$(78.)\quad \theta^{\rho}(j^{2\gamma}\theta^{\delta}+j^{2\gamma}\theta^{-\delta}+j^{-4\gamma}).$$

153. Cela posé, on a vu que H contient la substitution

$$S = |x,\ y,\ z\quad \tau x,\ \tau^{5}y,\ \tau^{25}z|$$

et une substitution T de la forme (72.). Comme on peut, sans changer la forme de S, prendre pour variables au lieu de y, z, des multiples quelconques de ces quantités, on pourra faire en sorte que a et b, et par suite c, se réduisent à l'unité; d'où

$$T = |x,\ y,\ z\quad y,\ z,\ x|.$$

Cette substitution, étant d'ordre 3 et étrangère au groupe Φ, appartiendra à l'un des groupes transformés de K. Soient x', y', z' les nouvelles variables qui ramènent les substitutions de ce groupe à la forme

$$|x',\ y',\ z'\quad \alpha x'+\beta y',\ \alpha' x'+\beta' y',\ \gamma z'|.$$

Il contiendra la substitution

$$U = |x',\ y',\ z'\quad j^{2}x',\ j^{2}y',\ j^{-4}z'|$$

échangeable à toutes ses substitutions, et notamment à T.

La substitution

$$V = U^{2} = |x',\ y',\ z'\quad -x',\ -y',\ z'|$$

aura -1 pour somme des racines de son équation caractéristique.

Soit

$$\begin{vmatrix} x & ax+by+cz \\ y & a'x+b'y+c'z \\ z & a''x+b''y+c''z \end{vmatrix}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], rapportée aux anciennes variables [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

$$[illegible] \qquad \ldots = ax + b'y + c'z$$
$$[illegible] = \qquad\qquad \ldots = a'x + b''y + c''z\,,$$
$$[illegible] \qquad\qquad z\quad ax + by + cz$$

[illegible] [illegible]

$$[illegible] = a', \quad c = a' = b''$$

[illegible]

$$\quad ax + by + cz$$
$$= \quad y \quad cx + ay + bz\,,$$
$$\quad z \quad bx + cy + az$$

[illegible] [illegible] [illegible]

$$\begin{vmatrix} a-s & b & c \\ [illegible] & a-s & b \\ b & c & a-s \end{vmatrix} = 0.$$

[illegible] [illegible] [illegible] de ses racines la somme $3a$ des coefficients diagonaux. [illegible] [illegible] [illegible] $[illegible] = -\frac{1}{2}$.

[illegible] Considérons maintenant la substitution

$$S^m V = \begin{matrix} x & r^m ax + r^{5m} by + r^{25m} cz \\ y & r^m cx + r^{5m} ay + r^{25m} bz \\ z & r^m bx + r^{5m} cy + r^{25m} az \end{matrix}\,,$$

[illegible] somme des racines de son équation caractéristique sera

$$r^m a + r^{5m} a + r^{25m} a = -\tfrac{1}{2}(r^m + r^{5m} + r^{25m})$$

quantité qui devrait être égale pour toute valeur de m à l'une des quantités (76.), (77.), (78.); ce qui est absurde. Car r est racine d'une équation irréductible de degré 30

$$(79.)\qquad \frac{r^{31}-1}{r-1} = 0,$$

laquelle reste irréductible après l'adjonction des irrationnelles j et θ. L'équation

$$-\tfrac{1}{2}(r^m + r^{5m} + r^{25m}) = A,$$

où A est l'une des quantités (76.), (77.), (78.) convenablement choisie devrait donc être identique, ou se réduire à l'équation (79.) après qu'on



aurait abaissé son degré par la suppression des multiples de 31 dans les exposants de τ. Or il est évident qu'il n'en peut être ainsi, de quelque manière que A soit choisi.

155. Théorème. *La solution* (XXII.) *ne peut fournir aucun groupe.*

On a

$$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'},$$

où $n = 6$, $p' = 7$, $p = 9$.

On verra comme au N°. 150 que le terme $\frac{p-1}{3p}$ provient de la considération d'un faisceau F' dont les substitutions ont pour forme canonique

$$(80.)\qquad |x,\ y,\ z\quad \theta^\varrho\tau^a x,\ \theta^\varrho\tau^{2a}y,\ \theta^\varrho\tau^{4a}z|$$

où $\theta^3 = 1$, $\tau^7 = 1$.

156. Soit en second lieu

$$|x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|$$

la forme canonique des substitutions du faisceau F qui donne le terme $\frac{p-1}{3p}$; l'ordre de ce faisceau étant 9φ, c'est-à-dire une puissance de 3, les coefficients a, b, c dans ses diverses substitutions seront des puissances d'une irrationnelle t, racine d'une équation binôme de degré 3^k. Nous allons montrer que l'on a $k = 2$, $\varphi = 3$.

En effet, F contient une substitution de la forme

$$(81.)\qquad |x,\ y,\ z\quad tx,\ t^\alpha y,\ t^{-\alpha-1}z|$$

laquelle, transformée par la substitution de la forme

$$(82.)\qquad |x,\ y,\ z\quad a'y,\ b'z,\ c'x|$$

que contient H, donnera la substitution

$$(83.)\qquad |x,\ y,\ z\quad t^\alpha x,\ t^{-\alpha-1}y,\ tz|.$$

Des substitutions (82.) et (83.) on déduit la suivante

$$|x,\ y,\ z\quad t^{m+\alpha n}x,\ t^{\alpha m-(\alpha+1)n}y,\ t^{-(\alpha+1)m+n}z|$$

où les exposants $m+\alpha n$, $\alpha m-(\alpha+1)n$ pourront prendre deux valeurs arbitraires quelconques mod. 3^k, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -\alpha-1 \end{vmatrix} = -\alpha^2-\alpha-1$$

est premier à 3, ce qui arrivera toutes les fois que α sera $\gtrless 1$ mod. 3. Dans ce cas, F contiendra toutes les substitutions de la forme

$$(84.)\qquad |x,\ y,\ z\quad t^\mu x,\ t^\nu y,\ t^{-\mu-\nu}z|.$$

Il aura donc pour ordre 3^{2k}, et contiendra la substitution

$$|x, y, z \quad t^{3^{k-1}}x, t^{3^{k-1}}y, t^{3^{k-1}}z| = |x, y, z \quad \theta x, \theta y, \theta z|.$$

On aura donc $\varphi = 3$, et F aura pour ordre $3^{2k-1}\varphi$.

Soit au contraire $\alpha \equiv 1 \bmod. 3$. On aura $-\alpha^2 - \alpha - 1 \equiv -3 \bmod. 9$; et par suite, on pourra choisir m et n de telle sorte que $m + \alpha n$ et $\alpha m - (\alpha+1)n$ prennent deux valeurs quelconques congrues par rapport au module 3. Les substitutions de F auront encore la forme (84.), avec la seule restriction $\nu \equiv \mu \bmod. 3$. Leur nombre sera $3^{2k-1} = 3^{2k-2}\varphi$, car on aura encore ici $\varphi = 3$.

Dans le cas actuel où cet ordre est égal à 9φ, on aura évidemment $k = 2$, et les substitutions de F seront de la forme (84.) avec la condition

$$\nu \equiv \mu \quad \bmod. 3.$$

157. Cherchons enfin l'expression des substitutions du faisceau F_1 d'ordre 6φ qui a fourni le terme $\frac{n-1}{2n}$.

Soit

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

la forme canonique de ces substitutions. F_1 résulte de la combinaison de deux groupes G et G_1, l'un d'ordre 2, l'autre d'ordre 3φ.

Le premier est formé par une substitution S d'ordre 2, dans laquelle a, b, c se réduiront par suite à ± 1. On a d'ailleurs $abc = 1$.

D'ailleurs le groupe I_1, formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F_1, ayant pour ordre $2n\varphi$, H contiendra une substitution T de la forme

$$|x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|.$$

Cela posé, on aura

$$S = |x, y, z \quad -x, -y, z|.$$

Car si S était égal, par exemple, à

$$|x, y, z \quad x, -y, -z|$$

T transformerait S en une nouvelle substitution

$$|x, y, z \quad -x, y, -z|$$

laquelle, combinée avec S, donnerait un faisceau d'ordre 4 contenu dans F_1, ce qui est impossible.

Quant à G_1, il résultera de la combinaison de Φ avec une substitution U d'ordre 3, dont la 3ème puissance appartiendra à Φ.

D'ailleurs U^3 se réduit à l'unité. En effet, considérons le groupe I d'ordre 3.9φ formé par les substitutions de H permutables à F. Son ordre étant égal à la plus haute puissance de 3 qui divise l'ordre de H, toute substitution de H dont l'ordre est une puissance de 3 appartiendra à I ou à ses transformés (*Sylow*, Mathematische Annalen T. V). Donc U est transformée d'une substitution de I.

Or les variables étant supposées choisies de manière à ramener F à sa forme canonique, les substitutions de I appartiendront à l'une des deux formes (82.) ou (84.). Ces dernières substitutions sont celles de F, et aucune de leurs transformées n'appartient au faisceau F_1. Donc U est la transformée d'une substitution de la forme (82.) dont le cube se réduit évidemment à l'unité (le déterminant $a'b'c'$ étant égal à 1).

La substitution U sera donc de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad \theta^\beta x,\ \theta^\gamma y,\ \theta^{-\beta-\gamma} z|$$

et combinée avec Φ reproduira toutes les substitutions de cette forme.

En les combinant avec S, on aura pour forme générale des substitutions de F_1 la suivante:

$$(85.)\qquad |x,\ y,\ z \quad (-1)^\delta \theta^\beta x,\ (-1)^\delta \theta^\gamma y,\ \theta^{-\beta-\gamma} z|.$$

158. Toute substitution de H sera donc réductible à l'une des formes canoniques (80.), (84.), (85.). La somme des racines de son équation caractéristique sera donc l'une des quantités

$$(86.)\qquad \theta^\varrho(\tau^\alpha+\tau^{2\alpha}+\tau^{4\alpha}),\quad (\tau^7=1),$$

$$(87.)\qquad t^\mu+t^\nu+t^{-\mu-\nu},\quad (t^9=1,\ \nu\equiv\mu \text{ mod.} 3),$$

$$(88.)\qquad (-1)^\delta(\theta^\beta+\theta^\gamma)+\theta^{-\beta-\gamma},\quad (\theta^3=1).$$

159. Cela posé, soit

$$U' = |x,\ y,\ z \quad a'y,\ b'z,\ c'x|$$

celle des substitutions permutables à F dont U est une transformée. On pourra, en prenant pour variables au lieu de y et z des multiples de ces quantités, faire en sorte que $a'=b'=1$, d'où $c'=1$. Cela posé, la substitution de H qui transforme U en U' transformera S en une substitution V d'ordre 2 et échangeable à U'. On verra comme au N°. 153 que V est de la forme

$$\begin{vmatrix} x & ax+by+cz \\ y & cx+ay+bz \\ z & bx+cy+az \end{vmatrix}$$

et que $a=-\frac{1}{3}$.

Faisons maintenant le produit de V par les diverses substitutions de F; nous obtiendrons de nouvelles substitutions, ayant pour coefficients diagonaux at^μ, at^ν, $at^{-\mu-\nu}$. La somme de ces coefficients sera

$$-\tfrac{1}{3}(t^\mu+t^\nu+t^{-\mu-\nu})$$

et doit être égale à l'une A des expressions (86.), (87.), (88.). Or si l'on pose, par exemple, $\mu=1$, $\nu=4$, il est aisé de voir que l'équation

$$-\tfrac{1}{3}(t+t^4+t^4) = A$$

laquelle devrait devenir identique en tenant compte des relations

$$\theta = t^3,\quad \frac{t^9-1}{t^3-1}=0$$

n'a pas lieu, de quelque manière qu'on choisisse A.

160. Théorème. ***La solution* (XLI.) *ne peut fournir aucun groupe.***

On verra comme dans le cas précédent qu'aux quatre termes $\frac{p-1}{3p}$, $\frac{p'-1}{3p'}$, $\frac{p''-1}{3p''}$, $\frac{1}{3}$ de la somme Σ correspondent quatre faisceaux F, F', F'', F''', dont les substitutions, mises sous forme canonique, auront respectivement les expressions suivantes:

1°. Pour les substitutions de F

$$|x, y, z \quad (-1)^\alpha\theta^{\alpha'}x,\ (-1)^\beta\theta^{\beta'}y,\ (-1)^{\alpha+\beta}\theta^{-\alpha'-\beta'}z|.$$

2°. Pour celles de F'

$$|x, y, z \quad t^\mu x,\ t^\nu y,\ t^{-\mu-\nu}z|,\quad (\nu\equiv\mu \text{ mod.} 3).$$

3°. Pour celles de F''

$$|x, y, z \quad \theta^\varrho\tau^\gamma x,\ \theta^\varrho\tau^{2\gamma}y,\ \theta^\varrho\tau^{4\gamma}z|.$$

4°. Pour celles de F'''

$$|x, y, z \quad \theta^{\alpha'}x,\ \theta^{\beta'}y,\ \theta^{-\alpha'-\beta'}z|$$

(cas particulier de la forme des substitutions de F).

161. Toute substitution de H étant transformée de l'une de celles qui précèdent, aura pour somme des racines de son équation caractéristique l'une des expressions

$$(89.)\quad (-1)^\alpha\theta^{\alpha'}+(-1)^\beta\theta^{\beta'}+(-1)^{\alpha+\beta}\theta^{-\alpha'-\beta'},$$

$$(90.)\quad t^\mu+t^\nu+t^{-\mu-\nu},$$

$$(91.)\quad \theta^\varrho(\tau^\gamma+\tau^{2\gamma}+\tau^{4\gamma}).$$

162. Cela posé, les variables étant choisies de manière à ramener F' à sa forme canonique, on verra comme précédemment que parmi les

substitutions de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad a'y,\ b'z,\ c'x|$$

il en existe une U' qui est la transformée d'une des substitutions U d'ordre 3 contenues dans F. Or F contient une substitution d'ordre 2 échangeable à U; donc H contiendra une substitution V d'ordre 2 et échangeable à U'.

Supposant, ce qui est permis, $a' = b' = c' = 1$, et achevant le raisonnement comme au cas précédent, on voit qu'on devrait avoir

$$-\tfrac{1}{3}(t+t^4+t^4) = A,$$

A désignant une des expressions (89.), (90.), (91.). On vérifie immédiatement que cela n'a pas lieu.

163. Théorème. ***La solution* (XLIII.) *ne peut donner aucun groupe.***

On a $\Sigma = \frac{p-1}{3p} + \frac{p'-1}{3p'} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}$, où $p' = 21$, $p = 27$. On voit comme précédemment qu'au terme $\frac{p-1}{3p}$ correspond un faisceau F, dont les substitutions auront pour forme canonique

$$(92.)\qquad |x,\ y,\ z \quad t^{\mu}x,\ t^{\nu}y,\ t^{-\mu-\nu}z|$$

où μ et ν sont quelconques (N°. 156).

Au terme $\frac{p'-1}{3p'}$ correspond un faisceau F', dont les substitutions auront pour forme canonique

$$(93.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^{\alpha}\tau^{\alpha'}x,\ \theta^{\beta}\tau^{\beta'}y,\ \theta^{-\alpha-\beta}\tau^{-\alpha'-\beta'}z|.$$

Au terme $\frac{1}{6}$, un faisceau F'', dont les substitutions auront pour forme canonique

$$|x,\ y,\ z \quad \theta^{\alpha}x,\ \theta^{\beta}y,\ \theta^{-\alpha-\beta}z|$$

laquelle rentre comme cas particulier dans les précédentes.

164. Enfin le terme $\frac{3}{8}$ résultera de l'énumération de substitutions permutables à l'un des faisceaux F, F', F'' (N°. 90) et d'ordre pair (leur équation caractéristique ayant deux racines égales et de signe contraire), ou de substitutions appartenant à des faisceaux d'ordre 4φ. (N°s. 74 ou 95).

Or un faisceau d'ordre 4φ résulte de la combinaison de Φ avec un faisceau d'ordre 4 dont les substitutions auront une forme canonique contenue dans la suivante

$$|x,\ y,\ z \quad i^{\gamma}x,\ i^{\delta}y,\ i^{-\gamma-\delta}z|,\quad (i^4 = 1)$$

par suite ses substitutions seront de la forme suivante

$$(94.)\qquad |x,\ y,\ z \quad \theta^{\varrho}i^{\gamma}x,\ \theta^{\varrho}i^{\delta}y,\ \theta^{\varrho}i^{-\gamma-\delta}z|.$$

D'autre part, les groupes I, I' formés par les substitutions de H respectivement permutables à F, F', ayant pour ordres les nombres impairs $3p\varphi$, $3p'\varphi$ ne contiendront aucune substitution d'ordre pair. Enfin, x, y, z étant supposés choisis de manière à ramener F' à sa forme canonique, les substitutions qui lui sont permutables sans lui appartenir seront de l'une des formes

$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bx,\ cz|,$$
$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ bz,\ cy|,$$
$$|x,\ y,\ z \quad az,\ by,\ cx|,$$
$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bz,\ cx|,$$
$$|x,\ y,\ z \quad az,\ ax,\ cy|.$$

Les deux dernières formes ne peuvent contenir aucune substitution d'ordre pair, car son cube, également d'ordre pair, appartiendrait à F', dont l'ordre est un nombre impair 3φ.

Considérons d'autre part une substitution R d'une des autres formes, par exemple de la première. Son carré

$$|x,\ y,\ z \quad abx,\ aby,\ c^2z|$$

appartient à F' et a deux coefficients égaux. Il appartient donc à Φ. Donc $ab = c^2$. D'ailleurs le déterminant $-abc$ est égal à 1. Donc $c^3 = -1$, d'où $c = -\theta^\varrho$. Cela posé, remplaçant x et y par de nouvelles variables x', y' qui ramènent R à sa forme canonique, on aura

$$\begin{aligned} R &= |x',\ y',\ z \quad \sqrt{ab}\,x',\ -\sqrt{ab}\,y',\ -\theta^\varrho z| \\ &= |x',\ y',\ z \quad \theta^\varrho x',\ -\theta^\varrho y',\ -\theta^\varrho z'|, \end{aligned}$$

ce qui est un cas particulier de la forme (94.).

165. Donc toute substitution de H ramenée à la forme canonique sera de l'une des espèces (92.), (93.), (94.). La somme des racines de son équation caractéristique sera donc de l'une des formes

$$(95.) \quad t^\mu + t^\nu + t^{-\mu-\nu},$$
$$(96.) \quad \theta^\alpha \tau^{\alpha'} + \theta^\beta \tau^{\beta'} + \theta^{-\alpha-\beta}\tau^{-\alpha'-\beta'},$$
$$(97.) \quad \theta^\varrho (i^\gamma + i^\delta + i^{-\gamma-\delta}).$$

166. Cela posé, F contient en particulier deux substitutions

$$U = |x,\ y,\ z \quad x,\ \theta y,\ \theta^2 z|$$

et

$$S = |x,\ y,\ z \quad \tau x,\ \tau^2 y,\ \tau^4 z|$$

l'une d'ordre 3 et l'autre d'ordre 7.

On verra comme au N°. 157 1°. que U est une transformée d'une substitution U' permutable à F et pouvant se mettre sous la forme

$$|x,\ y,\ z\quad y,\ z,\ x|$$

les variables étant ici choisies de telle sorte que F prenne sa forme canonique; 2°. que S est la transformée d'une substitution V échangeable à U', et qui sera par suite de la forme

$$\begin{vmatrix} x & ax+by+cz \\ y & cx+ay+bz \\ z & bx+cy+az \end{vmatrix}.$$

V étant la transformée de S, aura la même équation caractéristique; donc on aura

$$3a = \tau+\tau^2+\tau^4.$$

Cela posé, multiplions V par une quelconque des substitutions de F; nous obtiendrons une nouvelle substitution où la somme des coefficients diagonaux sera

$$a(t^{\mu}+t^{\nu}+t^{-\mu-\nu}) = \tfrac{1}{3}(\tau+\tau^2+\tau^4)(t^{\mu}+t^{\nu}+t^{-\mu-\nu}).$$

Cette expression devrait pour toute valeur de μ et de ν être égale à l'une des expressions (95.), (96.), (97.) et cette égalité devrait devenir identique en tenant compte des équations

$$\theta = t^3,\quad \frac{t^9-1}{t^3-1} = 0,\quad \frac{\tau^7-1}{\tau-1} = 0.$$

On vérifiera immédiatement que cela n'a pas lieu.

167. Théorème. *La solution* (XIV.) *ne peut fournir aucun groupe.*

On a

$$\Sigma = \frac{n-1}{2n}+\frac{n'-1}{2n'}+\tfrac{1}{3},\quad \text{où}\quad n'=8,\ n=10.$$

Le terme $\frac{1}{3}$ résulte de la considération d'un faisceau F'', d'ordre 3φ, dont les substitutions ont pour forme canonique

$$(98.)\qquad |x,\ y,\ z\quad \theta^{\alpha}x,\ \theta^{\beta}y,\ \theta^{-\alpha-\beta}z|,\qquad (\theta^3=1).$$

168. Le terme $\frac{n-1}{2n}$ résulte de la considération d'un faisceau F d'ordre 10φ. Soit

$$(99.)\qquad |x,\ y,\ z\quad ax,\ by,\ cz|$$

la forme canonique de ses substitutions. Le groupe I, formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F, ayant pour ordre $2n\varphi$,

résultera de la combinaison de F avec une substitution de la forme

$$(100.)\quad T = |x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|.$$

D'ailleurs, F résultera évidemment de la combinaison de Φ avec deux autres groupes de substitutions de la forme (99.), lesquels auront respectivement pour ordre 5 et 2.

Les coefficients a, b, c seront égaux à des racines cinquièmes de l'unité dans le premier de ces groupes, à ± 1 dans le second. De plus, ces groupes sont permutables à la substitution T; on en déduit aisément que leurs substitutions sont de la forme

$$(101.)\quad |x, y, z \quad \tau^a x, \tau^{-a} y, z|, \quad \text{où} \quad \tau^5 = 1$$

et

$$(102.)\quad |x, y, z \quad -x, -y, z|.$$

En les combinant avec Φ, on aura pour les substitutions de F la forme générale suivante

$$(103.)\quad |x, y, z \quad \theta^{\varrho} t^{\gamma} x, \theta^{\varrho} t^{-\gamma} y, \theta^{\varrho} z|$$

où t est une racine 10e de l'unité.

169. Reste enfin le faisceau F' d'ordre 8φ correspondant au terme $\frac{n'-1}{2n'}$. Il résulte de la combinaison de Φ avec un groupe G' d'ordre 8. Soit

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

la forme canonique des substitutions de ce dernier groupe; a, b, c y seront des puissances d'une quantité j, racine 8ème de l'unité. D'ailleurs le groupe Γ', formé par les substitutions de H qui sont permutables à F', ayant pour ordre $2n'\varphi$, H contiendra une substitution T' de la forme

$$T' = |x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|.$$

Supposons d'abord que parmi les substitutions de G' il y en ait une

$$S = |x, y, z \quad j^{\lambda} x, j^{\mu} y, j^{\nu} z|$$

dans laquelle l'un des exposants λ, μ, ν soit impair; G' se réduira évidemment aux puissances de S. T' étant permutable à G', la substitution

$$T'^{-1} S T' = |x, y, z \quad j^{\mu} x, j^{\lambda} y, j^{\nu} z|$$

sera une puissance de S. Il faut évidemment pour cela qu'on ait $\mu = \lambda$, ou $\nu = 0$. Mais si μ était égal à λ, T' serait échangeable à S, et par suite à toutes les substitutions de F'. On pourrait l'adjoindre à ce faisceau de manière à obtenir un nouveau faisceau plus général, ce qui est supposé

impossible. Donc $\nu = 0$, et par suite $\lambda = -\mu$, S ayant l'unité pour déterminant.

Les substitutions de F' auront donc pour forme générale

$$(104.) \quad |x, y, z \quad \theta^\varrho j^\lambda x, \theta^\varrho j^{-\lambda} y, \theta^\varrho z|.$$

170. Supposons au contraire que les exposants de j soient pairs dans toutes les substitutions de G'; elles seront de la forme

$$S = |x, y, z \quad i^\lambda x, i^\mu y, i^\nu z|$$

en posant $i = j^2$.

T' transformant une substitution de cette sorte en

$$S' = |x, y, z \quad i^\mu x, i^\lambda y, i^\nu z|$$

la série des valeurs de λ et celle des valeurs de μ se confondront. Chacun de ces exposants prendra 4 valeurs distinctes dans les substitutions de G'; sinon le nombre des systèmes de valeurs de λ, μ, et par suite le nombre des substitutions de F', se réduirait à 4, au lieu de 8.

D'autre part, ν sera pair; car s'il était impair, $\lambda+\mu$ le serait également, S ayant 1 pour déterminant; $\lambda-\mu$ le serait aussi. Cela posé, dans S et ses puissances le rapport des coefficients de x et de y aurait 4 valeurs distinctes, égales aux diverses puissances de $j^{\lambda-\mu}$. D'autre part, la substitution

$$SS' = |x, y, z \quad i^{\lambda+\mu} x, i^{\lambda+\mu} y, i^{2\nu} z|$$

et ses puissances, donneraient un système de 4 substitutions où ce rapport serait égal à 1. Donc l'ordre de G' serait 16 au lieu de 8.

Mettant donc 2ν à la place de ν, on aura pour la forme générale des substitutions de F'

$$(105.) \quad |x, y, z \quad \theta^\varrho i^\lambda x, \theta^\varrho i^{-\lambda-2\nu} y, \theta^\varrho i^{2\nu} z|.$$

171. Toute substitution de F aura donc pour forme canonique une des expressions (98.), (103.) et (104.), ou (98.), (103.) et (105.).

La somme des racines de son équation caractéristique sera donc de l'une des formes

$$(106.) \quad \theta^\alpha + \theta^\beta + \theta^{-\alpha-\beta},$$

$$(107.) \quad \theta^\varrho (t^\gamma + t^{-\gamma} + 1),$$

$$(108.) \quad \theta^\varrho (j^\lambda + j^{-\lambda} + 1)$$

ou de l'une des formes (106.), (107.) et

$$(109.) \quad \theta^\varrho (i^\lambda + i^{-\lambda-2\nu} + i^{2\nu}).$$

172. Cela posé, admettons que les variables aient été choisies de telle sorte que F ait sa forme canonique. La substitution T de la forme (100.) aura évidemment pour ordre un nombre pair; on peut supposer que cet ordre est une puissance de 2. Car on pourrait au besoin considérer au lieu de T une de ses puissances impaires convenablement choisie. On peut en outre choisir y de telle sorte qu'on ait $a' = 1$.

Cela posé, la substitution

$$T^2 = |x, y, z \quad b'x, b'y, c'^2 z|$$

sera l'une des substitutions d'ordre puissance de 2 que contient F, lesquelles ne sont autres que l'unité et la substitution

$$S = |x, y, z \quad -x, -y, z|.$$

Donc $c'^2 = 1$; et comme $-b'c'$, déterminant de T, est égal à 1, T sera de l'une des deux formes

$$(110.) \quad |x, y, z \quad y, -x, z|,$$

$$(111.) \quad |x, y, z \quad y, x, -z|.$$

Or toute substitution de H est la transformée d'une substitution appartenant à l'un des faisceaux F, F', F''. Ce dernier ne contenant que des substitutions d'ordre impair, T sera la transformée d'une substitution de l'un des faisceaux F, F', d'ordre 10φ et 8φ. Donc le nombre des substitutions de F échangeables à T sera 10φ ou 8φ.

173. On en conclut que T ne peut être de la forme (110.). On vérifie en effet immédiatement que pour qu'une substitution

$$V = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz \\ y & a'x + b'y + c'z \\ z & a''x + b''y + c''z \end{vmatrix}$$

soit échangeable à (110.), il faut qu'on ait

$$a' = -b, \quad b' = a, \quad c = c' = 0, \quad a'' = b'' = 0.$$

Donc V appartiendrait au groupe K formé par celles des substitutions de H qui ont pour expression

$$\begin{vmatrix} x & \alpha x + \beta y \\ y & \alpha' x + \beta' y \\ z & \gamma z \end{vmatrix}.$$

Ce groupe K est évidemment dérivé de la combinaison de T avec F; et celles de ses substitutions qui sont échangeables à T résultent de la

combinaison de T avec les substitutions de F échangeables à T, lesquelles se réduisent aux 2φ substitutions dérivées de S et de Φ. Le nombre total des substitutions échangeables à T ne serait donc que 4φ, ce qui est absurde.

174. Supposons donc T de la forme (111.). Pour que la substitution V lui soit échangeable, il faudra qu'on ait

$$a' = b, \quad b' = a, \quad c' = -c, \quad a'' = -b'';$$

d'où

$$V = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz \\ y & bx + ay - cz \\ z & a''x - a''y + c''z \end{vmatrix}.$$

H doit contenir 10φ ou 8φ substitutions de cette forme, parmi lesquelles 4φ seulement appartiennent à K. Nous prendrons pour V l'une de celles qui ne lui appartiennent pas.

175. Cela posé, F contenant la substitution

$$S' = |x, y, z \quad tx, t^{-1}y, z|$$

et la substitution S, H contiendra les substitutions V, SV, $S'V$ où la somme des coefficients diagonaux sera respectivement

$$2a + c'', \quad -2a + c'', \quad a(t + t^{-1}) + c''.$$

On devrait donc avoir

$$(112.) \qquad \begin{cases} 2a + c'' = A, \\ -2a + c'' = B, \\ a(t + t^{-1}) + c'' = C. \end{cases}$$

A, B, C étant des quantités convenablement choisies parmi celles des formes (106.), (107.), (108.) ou (106.), (107.), (109.).

De ces trois équations on déduit

$$(113.) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & A \\ -2 & 1 & B \\ t + t^{-1} & 1 & C \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui doit devenir identique lorsqu'on aura tenu compte des équations irréductibles

$$\theta^2 + \theta + 1 = 0,$$
$$\frac{t^5 + 1}{t + 1} = 0,$$
$$j^4 + 1 = 0,$$
$$i^2 + 1 = 0.$$

auxquelles satisfont θ, t, j, i.

Or on peut vérifier assez rapidement que l'équation (113.) ne peut être satisfaite que si l'on prend $A = B = C$; auquel cas les équations (112.) donneront $a = 0$.

Mais parmi les substitutions échangeables à T et n'appartenant pas à K se trouve la substitution

$$TV = \begin{vmatrix} x & bx + ay - cz \\ y & ax + by + cz \\ z & -a''x + a''y - c''z \end{vmatrix}.$$

Raisonnant sur celle-ci comme sur V, on trouverait $b = 0$.

On aurait donc $a = b = 0$; ce qui est absurde, car le déterminant de V serait nul.

176. Théorème. *La solution* (XXXI.) *ne peut fournir aucun groupe.*

On a

$$\Sigma = \frac{n-1}{2n} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}, \quad \text{où} \quad n = 5.$$

Le terme $\frac{n-1}{2n}$ proviendra d'un faisceau F d'ordre 5φ, dont les substitutions seront de la forme

$$(114.) \qquad |x, y, z \quad \theta^\varrho t^\alpha x, \theta^\varrho t^{-\alpha} y, \theta^\varrho z|$$

t étant une racine cinquième de l'unité.

Le groupe K d'ordre $2n\varphi$ formé par les substitutions de H permutables à F s'obtiendra en combinant à F des substitutions de la forme

$$T = |x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|.$$

Les faisceaux $f, f_1, \ldots$ autres que F contenus dans K résultent chacun de la combinaison de Φ avec une substitution de la forme T. Le carré de cette substitution appartient à F, et multiplie x et y par un même facteur. Il appartient donc à Φ; et par suite l'ordre de chacun des faisceaux $f, f_1, \ldots$ sera 2φ.

177. Le terme $\frac{2}{3}$ provient de la considération d'un ou plusieurs faisceaux d'ordre 3φ. Soit F' l'un de ces faisceaux. Ses substitutions auront pour forme canonique

$$(115.) \qquad |x, y, z \quad \theta^\alpha x, \theta^\beta y, \theta^{-\alpha-\beta} z|.$$

Si F' donne à lui seul le terme $\frac{2}{3}$, l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de H qui sont permutables à F' étant 9φ, H ne

contiendra aucune substitution des formes

$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bx,\ cz\,|,$$
$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ bz,\ cy\,|,$$
$$|x,\ y,\ z \quad az,\ by,\ cx\,|.$$

Il en contiendrait au contraire si F' ne donnait que la moitié du terme $\frac{2}{9}$.

Soient K', L', M' les groupes respectivement formés par celles des substitutions de H qui sont des formes

$$|x,\ y,\ z \quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z\,|,$$
$$|x,\ y,\ z \quad \alpha x,\ \beta y+\gamma z,\ \beta' y+\gamma' z\,|,$$
$$|x,\ y,\ z \quad \alpha x+\gamma z,\ \beta y,\ \alpha' x+\gamma' z\,|.$$

Ces groupes sont transformés les uns dans les autres par les substitutions de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bz,\ cx\,|$$

que H contient nécessairement.

Si F' donne à lui seul le terme $\frac{2}{9}$, il se confondra avec K'. Sinon K' résultera de la combinaison de F' avec des substitutions de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ay,\ bx,\ cz\,|.$$

Dans ce cas les divers faisceaux f', ... autres que F', contenus dans K', auront pour ordre 2φ.

178. Reste le terme $\frac{3}{8}$. Il résultera de l'énumération totale ou partielle des substitutions contenues dans les transformés de $f, f_1, \ldots f', \ldots$ ou d'autres faisceaux ayant pour ordre $m\varphi$, m étant une puissance de 2 (Nos. 74, 90 et 95).

Chacun des faisceaux qui concourent à produire ce terme $\frac{3}{8}$ résultera donc de la combinaison de Φ avec un groupe g d'ordre puissance de 2.

Or la plus haute puissance de 2 qui divise 72.5φ étant 8, on sait (*Sylow*) que H contient un groupe G d'ordre 8, et que tout groupe d'ordre puissance de 2 contenu dans H sera contenu dans G ou dans l'un de ses transformés.

179. Les substitutions de ce groupe G ne peuvent être toutes échangeables entre elles. En effet supposons qu'il en fût ainsi, et considérons le faisceau F'' formé par la combinaison des substitutions de G et de Φ. Ramenons ses substitutions à la forme canonique

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ by,\ cz\,|.$$

Le groupe K'' formé par celles des substitutions de H qui sont de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y,\ \gamma z|$$

se réduit à F'.

Soit en effet $8p\varphi$ l'ordre de K''; p sera impair; car H, qui contient K'', n'a pas son ordre divisible par 16. Cela posé, si p était >1, K'' contiendrait un faisceau d'ordre $8p\varphi$ ou $4p\varphi$, suivant que le groupe

$$|x,\ y \quad \alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y|$$

appartiendrait au premier ou au second type. Cela est impossible, car on a vu que tous les faisceaux contenus dans H ont pour ordre 5φ, 3φ ou $m\varphi$, m étant une puissance de 2.

Il résulte de là que les substitutions de F', même celles où $a=b$, n'appartiennent chacune (celles de Φ exceptées) qu'à un seul faisceau. L'énumération de leurs transformées donnerait donc dans Σ au lieu du terme $\frac{3}{8}$, un terme $\frac{7}{8k}$, $8k\varphi$ désignant l'ordre du groupe formé par les substitutions de H permutables à F' (On aura évidemment ici $k=1$ ou 3).

180. D'ailleurs, G contient une substitution d'ordre 4. Supposons en effet qu'il en fût autrement. Parmi les substitutions de G, il en est une échangeable à toutes les autres. Soit

$$S = |x,\ y,\ z \quad -x,\ -y,\ z|$$

cette substitution.

Une seconde substitution S', d'ordre 2 et échangeable à S, pourra se mettre sous la forme

$$S' = |x,\ y,\ z \quad x,\ -y,\ -z|.$$

G résultera de ces deux substitutions, combinées avec une troisième S'' permutable au groupe (S, S'), et qui sera de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad \alpha y,\ \beta x,\ \gamma z|.$$

On peut supposer $\alpha=1$; S''^2 se réduisant à l'unité, on aura $\beta=1$, $\gamma=-1$. Mais alors la substitution

$$S'S'' = |x,\ y,\ z \quad y,\ -x,\ z|$$

sera d'ordre 4.

181. La substitution d'ordre 4, dont l'existence vient d'être démontrée, peut se mettre sous la forme

$$S = |x,\ y,\ z \quad i^{\lambda}x,\ i^{\mu}y,\ i^{\nu}z|.$$

D'ailleurs G contient une substitution permutable au groupe Γ dérivé de S, sans être échangeable à S. Elle sera de la forme

$$T = |x, y, z \quad \alpha y, \beta x, \gamma z|$$

et transforme S en

$$|x, y, z \quad i^{\mu} x, i^{\lambda} y, i^{\nu} z|$$

laquelle doit être une puissance de S sans se confondre avec elle. On aura donc $\nu = 0$, et par suite $\mu = -\lambda$. Γ sera donc formé des puissances de la substitution

$$(116.) \qquad S = |x, y, z \quad ix, i^{-1}y, z|.$$

Quant à T, on pourra supposer $\alpha = 1$, et comme son carré appartient à Γ, on aura $\beta = \pm 1$ d'où $\gamma = \mp 1$. Donc T sera de l'une des formes suivantes

$$(117.) \qquad |x, y, z \quad y, x, -z|,$$

$$(118.) \qquad |x, y, z \quad y, -x, z|.$$

Remplaçant x, y par de nouvelles variables x', y' qui ramènent T à sa forme canonique, on trouvera dans le premier cas

$$T = |x', y', z \quad x', -y', -z|$$

et dans le second

$$T = |x', y', z \quad ix', i^{-1}y', -z|.$$

Les substitutions du groupe dérivé de G et de Φ, dont les transformées restaient à énumérer, ont donc chacune pour forme canonique une expression de l'espèce suivante

$$(119.) \qquad |x, y, z \quad \theta^{\varrho} i^{\lambda} x, \theta^{\varrho} i^{-\lambda} y, \theta^{\varrho} z|.$$

182. Toute substitution de H étant réductible à l'une des formes canoniques (114.), (115.), (119.), la somme de ses coefficients diagonaux sera l'une des expressions

$$(120.) \qquad \theta^{\varrho}(t^{\alpha} + t^{-\alpha} + 1),$$

$$(121.) \qquad \theta^{\alpha} + \theta^{\beta} + \theta^{-\alpha-\beta},$$

$$(122.) \qquad \theta^{\varrho}(i^{\lambda} + i^{-\lambda} + 1).$$

183. Cela posé, admettons que les variables soient choisies de manière à ramener S et T aux formes (116.) et (117.) ou (118). On verra comme au N°. 179, que le groupe K'' formé des substitutions

$$(123.) \qquad |x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|$$

a pour ordre 8φ, et par suite se réduit au groupe dérivé de la combinaison

de S et T avec les substitutions de Φ. Donc les substitutions permutables à Γ, lesquelles se réduisent évidemment à celles de K'', sont en nombre 8φ, et Γ aura $\frac{\Omega}{8\varphi}$ transformés distincts (Ω étant l'ordre de H). D'autre part, Γ renferme 3φ substitutions autres que celles de Φ; et il est clair que toute substitution qui transforme une de ces substitutions en une autre substitution de Γ, appartient à K'', et par suite est permutable à Γ.

Le nombre des substitutions, autres que les Φ, contenues dans Γ et ses transformés, sera donc $\frac{3\varphi}{8\varphi}\Omega$; ce qui donnera dans Σ le terme $\frac{3}{8}$.

184. Si la substitution T échappait à cette énumération, la somme Σ devrait contenir quelque nouveau terme, contrairement à l'hypothèse. Donc T doit être la transformée de l'une des substitutions de Γ.

Supposons d'abord T de la forme (118.). On voit immédiatement que les substitutions susceptibles de produire cette transformation sont de la forme (123.) sans appartenir à K''. Elles ne peuvent donc se trouver contenues dans H.

185. Il faut donc supposer T de la forme (117.). Dans ce cas T, étant d'ordre 2, sera une transformée de S^2, seule substitution de Γ qui soit d'ordre 2; S aura pour transformée une substitution V, ayant pour carré T. V étant échangeable à T, sera de la forme

$$\begin{vmatrix} x & ax+by+cz \\ y & bx+ay-cz \\ z & a''x-a''y+c''z \end{vmatrix}.$$

D'ailleurs la somme des coefficients diagonaux doit y être la même que dans S dont elle est la transformée. Donc

$$(124.)\qquad 2a+c'' = i+i^{-1}+1 = 1.$$

Formons maintenant les substitutions SV, S^2V. Leurs coefficients diagonaux seront respectivement ai, $ai^{-1} = -ai$, c'' et $-a$, $-a$, c''. On aura par suite

$$(125.)\qquad \begin{cases} c'' = A, \\ -2a+c'' = B. \end{cases}$$

A et B étant des quantités convenablement choisies dans les formules (120.), (121.), (122.).

Des équations (124.), (125.) on déduit la suivante

$$2A = B+1.$$

On vérifie immédiatement qu'elle ne peut être satisfaite qu'en posant

$$A = B = 1.$$

Mais alors on aura $a = 0$, $c'' = 1$.

186. Si au lieu de la substitution V, on considérait la substitution

$$TV = \begin{vmatrix} x & bx + ay & -cz \\ y & ax + by & +cz \\ z & -a''x + a''y - c''z \end{vmatrix}$$

qui jouit des mêmes propriétés, on trouverait de même $b = 0$.

Mais si a et b sont nuls, V aura son déterminant nul, ce qui est absurde.

187. Il nous reste à examiner les groupes simples que peut fournir la solution (XXXII.). On sait *à priori* qu'elle en donne au moins un, correspondant aux divers mouvements qui superposent à lui-même un icosaèdre régulier. Mais il est nécessaire de s'assurer si ce groupe est le seul.

H ayant pour ordre 60φ, son isomorphe H', formé comme il est indiqué au N°. 126, sera simple et d'ordre 60. Or on sait que tout groupe de cette sorte est isomorphe au groupe H'' alterné entre 5 lettres. Donc H sera lui-même isomorphe à H''.

188. Soient $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ les 5 lettres du groupe H''; il est dérivé des substitutions

$$A'' = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon),$$
$$B'' = (\beta\varepsilon)(\gamma\delta),$$
$$C'' = (\beta\gamma)(\delta\varepsilon),$$

qui ont respectivement pour ordre 5 et 2. Soit A l'une des substitutions de H qui correspondent à A''; sa 5e puissance appartiendra au groupe Φ formé des substitutions de H qui correspondent à l'unité dans H''.

Si Φ se réduit à la substitution 1, on aura $A^5 = 1$. Sinon, Φ sera formé des puissances d'une substitution qui multiplie x, y, z par une quantité θ, racine cubique de l'unité, substitution que nous désignerons elle-même par θ. On aura dans ce cas $A^5 = \theta^\varrho$. Mais H contiendra alors la substitution $\theta^\varrho A$, dont la 5e puissance se réduit à l'unité, et qui correspond également à la substitution A''.

Parmi les substitutions de H correspondantes à A'', il en existe donc toujours une d'ordre 5; c'est celle-là que nous désignerons par A. De

même parmi les substitutions correspondantes à B'' et C'' il en existera d'ordre 2 que nous appellerons respectivement B et C.

189. Cela posé, la substitution A, étant d'ordre 5, aura pour forme canonique

$$|x, y, z \quad \tau^{\lambda} x, \tau^{\mu} y, \tau^{\nu} z|, \quad \text{où} \quad \tau^5 = 1.$$

D'autre part, B'' transformant A'' en A''^{-1}, B devra transformer A en $\theta^{\varrho} A^{-1}$, substitution canonique. Donc B permutera les unes dans les autres les variables x, y, z à des facteurs constants près; et comme elle est d'ordre 2, elle sera de la forme

$$|x, y, z \quad ay, bx, cz|.$$

On peut choisir y de telle sorte que a se réduise à 1; B^2 étant égal à 1, on aura $b = 1$; enfin B ayant 1 pour déterminant, on aura $c = 1$; d'où

$$(126.) \qquad B = |x, y, z \quad y, x, -z|.$$

La transformée de A par B sera

$$x, y, z \quad \tau^{\mu} x, \tau^{\lambda} y, \tau^{\nu} z|.$$

Pour qu'elle se réduise à $\theta^{\varrho} A^{-1}$, il faudra qu'on ait

$$\theta^{\varrho} \tau^{-\nu} = \tau^{\nu}, \quad \text{d'où} \quad \varrho = \nu = 0.$$

D'ailleurs A ayant 1 pour déterminant, on aura $\mu = -\lambda$. Enfin on pourra supposer $\lambda = 1$, τ désignant l'une quelconque des racines cinquièmes de l'unité. On aura donc

$$(127.) \qquad A = |x, y, z \quad \tau x, \tau^{-1} y, z|.$$

190. Reste à construire la substitution C. C'' étant échangeable à B'', C devra transformer B en une substitution de la forme $\theta^{\varrho} B$. Cette transformée devant d'ailleurs être réductible à la même forme canonique que B, on aura nécessairement $\varrho = 0$. Donc C sera échangeable à B, et par suite de la forme

$$\begin{vmatrix} x & ax + by + cz \\ y & bx + ay - cz \\ z & a''x - a''y + c''z \end{vmatrix}.$$

191. D'ailleurs $C^2 = 1$. Donc C aura pour forme canonique

$$|x', y', z' \quad \pm x', \pm y', \pm z'|.$$

D'ailleurs C diffère de l'unité, et a 1 pour déterminant. Donc l'un des coefficients ambigus sera $+1$ et les deux autres -1. Donc C aura pour

équation caractéristique

$$(s+1)(s-1)^2 = 0.$$

Identifiant cette équation à la suivante

$$\begin{vmatrix} a-s & b & c \\ b & a-s & -c \\ a'' & -a'' & c''-s \end{vmatrix} = 0,$$

il viendra

$$(128.)\quad 2a+c'' = -1,$$

$$(129.)\quad 2(ac''-a''c)+a^2-b^2 = +1,$$

$$(130.)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ a'' & -a'' & c'' \end{vmatrix} = 1.$$

En outre C multipliant $x+y$ par $a+b$, $a+b$ sera racine de son équation caractéristique; on aura donc l'équation

$$(131.)\quad a+b = \pm 1,$$

qui pourra remplacer l'une des précédentes.

192. En second lieu, la substitution

$$A''C'' = (\alpha\gamma\varepsilon)$$

étant d'ordre 3, la substitution

$$(132.)\quad AC = \begin{vmatrix} x & a\tau x+b\tau^{-1}y+cz \\ y & b\tau x+a\tau^{-1}y-cz \\ z & a''\tau x-a''\tau^{-1}y+c''z \end{vmatrix}$$

aura pour cube une substitution de Φ. Si donc on prend de nouvelles variables x', y', z' qui la ramènent à la forme canonique, on aura

$$AC = |x', y', z' \quad a'x', b'y', c'z'|$$

où a', b', c' ne diffèrent que par des puissances de θ.

D'ailleurs $B''C'' = (\beta\delta)(\gamma\varepsilon)$ est d'ordre 2, et transforme $A''C''$ en $(A''C'')^{-1}$. Donc BC aura pour carré une substitution de Φ et transformera AC en $\theta^\varrho(AC)^{-1}$, qui aura la forme canonique lorsqu'on prendra pour variables x', y', z'. Donc BC sera de la forme

$$|x', y', z' \quad a''y', b''x', c''z'|$$

et transforme AC en

$$|x', y', z' \quad b'x', a'y', c'z'|$$

qui doit se confondre avec $\theta^\varrho(AC)^{-1}$.

On aura donc

$$b' = \theta^{\varrho} a'^{-1}, \quad a' = \theta^{\varrho} b'^{-1}, \quad c' = \theta^{\varrho} c'^{-1}$$

d'où

$$c' = \theta^{2\varrho}, \quad a'b' = \theta^{\varrho}.$$

Mais a', b' ne diffèrent de c' que par des puissances de θ. Donc a', b', c' sont des puissances de θ. Si deux de ces coefficients étaient égaux, le troisième leur serait égal en vertu de l'équation $a'b'c' = 1$; et AC appartiendrait à Φ, ce qui est impossible, $A''C''$ ne se réduisant pas à l'unité. Donc a', b', c' reproduiront à l'ordre près les quantités 1, θ, θ^2, et AC aura pour équation caractéristique

$$0 = (s-1)(s-\theta)(s-\theta^2) = s^3-1.$$

Identifiant cette équation avec celle qui résulte de l'équation (132.), on aura les équations

$$(133.) \quad a(\tau+\tau^{-1})+c'' = 0,$$

$$(134.) \quad (ac''-ca'')(\tau+\tau^{-1})+a^2-b^2 = 0.$$

Cela posé, les équations (128.) et (133.) donneront

$$a = \frac{1}{\tau+\tau^{-1}-2}, \quad c'' = -1-2a.$$

Les équations (129.) et (134.), comparées aux précédentes, donneront

$$ac''-ca'' = -a, \quad a^2-b^2 = -c'' = -1-2a$$

d'où

$$ca'' = -2a^2,$$

$$b^2 = (1+a)^2.$$

Cette dernière équation comparée avec l'équation (131.) donnera

$$b = -1-a.$$

On peut d'ailleurs, sans altérer l'expression des substitutions A et B prendre pour variable au lieu de s un quelconque de ses multiples, et par suite donner à a'' une valeur arbitraire. Si nous faisons $a'' = 1$, par exemple, nous aurons

$$c = -2a^2.$$

On aura donc

$$C = \begin{vmatrix} x & ax-(1+a)y- & 2a^2s \\ y & -(1+a)x+ & ay+ & 2a^2s \\ s & x- & y-(1+2a)s \end{vmatrix}$$

où

$$a = \frac{1}{\tau + \tau^{-1} - 2}.$$

193. Le groupe (A, B, C), déterminé comme on le voit sans ambiguïté, se confond nécessairement avec celui des substitutions orthogonales qui superposent à lui même l'icosaèdre régulier. Il aura donc pour ordre 60.

On en déduirait un groupe d'ordre 60.3 en lui associant les puissances de la substitution θ.

194. La détermination des groupes simples étant actuellement terminée, il ne nous reste plus qu'à chercher les groupes composés, en commençant par ceux dont les substitutions sont permutables aux groupes déjà trouvés.

195. Théorème. *Il n'existe aucun groupe composé dont les substitutions soient permutables au groupe d'ordre* 60φ *que nous venons de déterminer.*

Soient H le groupe ci-dessus d'ordre 60φ; S une substitution qui lui soit permutable. Elle devra transformer les uns dans les autres les groupes d'ordre 5 que contient H. Mais ces groupes s'obtiennent tous (*Sylow*) en transformant par les substitutions de H l'un d'entre eux, par exemple le groupe F formé des puissances de la substitution A. On aura donc $S = TS'$, S' étant une substitution de H, et T une nouvelle substitution permutable à H.

Or A étant ramené à sa forme canonique (127.), il est évident que les substitutions permutables à F se réduisent aux deux formes

$$(135.) \quad |x, y, z \quad ax, by, cz|,$$

$$(136.) \quad |x, y, z \quad ay, bx, cz|.$$

D'ailleurs H contient B, qui est de cette dernière forme. On aura donc $T = U$ ou $T = BU$, U étant de la forme (135.) et permutable à H.

D'autre part, U transformera la substitution

$$B = |x, y, z. \quad y, x, -z|$$

en

$$(137.) \quad |x, y, z \quad ab^{-1}y, ba^{-1}x, -z|.$$

Or les substitutions de la forme (136.) que contient H sont de la forme

$$\theta^{\varrho} A^{\alpha} B = |x, y, z \quad \theta^{\varrho}\tau^{-\alpha}y, \theta^{\varrho}\tau^{\alpha}y, -\theta^{\varrho}z|.$$

La substitution (137.) étant de cette forme, on aura

$$ab^{-1} = \theta^{\varrho}\tau^{-\alpha}, \quad \theta^{\varrho} = 1$$

d'où $b = a\tau^a$. On aura par suite

$$U = VA^{-3a},$$

V étant une substitution de la forme

$$|x, y, z \quad mx, my, nz|$$

et permutable à H.

La substitution

$$C = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz \\ y & bx + ay - cz \\ z & a''x - a''y + c''z \end{vmatrix}$$

transformée par V, donnera

$$C_1 = V^{-1}CV = \begin{vmatrix} x & ax + & by + \frac{mc}{n} z \\ y & bx + & ay - \frac{mc}{n} z \\ z & \frac{na''}{m} x - & \frac{na''}{m} y + \quad c''z \end{vmatrix}.$$

Cette substitution, ne différant de C que par le changement de c, a'' en $\frac{mc}{n}$, $\frac{n}{m} c$, satisfera à des relations

$$BC_1 = C_1 B, \quad C_1^2 = 1, \quad (AC_1)^3 = 1$$

analogues à celles qui nous ont servi à calculer C. Car ces équations ne déterminaient comme on l'a vu, que le produit des deux coefficients a et c''.

Soit donc C_1'' celle des substitutions du groupe H'' alterné entre 5 lettres, qui correspond à C_1; on aura

$$B''C_1'' = C_1''B'', \quad C_1''^2 = 1, \quad (A''C_1'')^3 = 1.$$

Mais on vérifie immédiatement que la substitution $C'' = (\beta\gamma)(\delta\varepsilon)$ est la seule qui satisfasse à ces relations.

Donc $C_1'' = C''$; et par suite, les substitutions C_1 et C qui leur correspondent ne devront différer que par une puissance de θ. D'après ce qu'on connaît déjà de leurs formes, elles ne pourront être qu'identiques. Donc $m = n$.

La substitution V ayant d'ailleurs 1 pour déterminant, devra se réduire à une puissance de θ. Donc la substitution S sera le produit de substitutions, toutes contenues dans le groupe (A, B, C, θ).

On ne peut donc adjoindre à ce groupe de nouvelles substitutions qui lui soient permutables, ce qui établit notre proposition.

196. Théorème. *Les groupes permutables à un faisceau F dont toutes les substitutions ont la forme*

$$|x, y, z \quad ax, by, cz|$$

rentrent dans les catégories déjà étudiées.

En effet, si chacun des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, a plusieurs valeurs dans chacune des substitutions de F, x, y, z et leurs multiples seront les seules fonctions des variables que les substitutions de F multiplient par un facteur constant. Toute substitution permutable à F devant les remplacer les unes par les autres sera de l'une des formes (48.) à (53.). Et tout groupe formé de semblables substitutions sera l'un des groupes du N°. 62.

Supposons au contraire que F ait toutes ses substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad ax, ay, cz|.$$

Les substitutions permutables à F seront de la forme

$$|x, y, z \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y, \gamma z|.$$

Soit K un groupe d'ordre fini formé de semblables substitutions. Le groupe K' formé des substitutions

$$|x, y \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y|$$

sera également d'ordre fini, et appartiendra à l'un des 5 types trouvés pour le second ordre. Quel que soit ce type, K sera l'un des groupes du N°. 62.

197. Théorème. *Les groupes permutables à un groupe K dont toutes les substitutions sont de l'une des formes*

$$(138.) \quad |x, y, z \quad ax, by, cz|,$$

$$(139.) \quad |x, y, z \quad a'y, b'x, c'z|$$

appartiennent aux catégories déjà étudiées.

Soient en effet Ψ le groupe formé par celles des substitutions de K qui sont de la forme

$$(140.) \quad |x, y, z \quad ax, ay, cz|,$$

$\omega = m\varphi$ son ordre. Soient d'autre part F le faisceau formé par celles des substitutions de K qui sont de la forme (138.), $pm\varphi$ son ordre. Les autres faisceaux contenus dans K s'obtiendront chacun en adjoignant à Ψ une substitution de la forme (139.) et auront pour ordre $2m\varphi$.

Si $p > 2$, F étant le seul faisceau contenu dans K qui ait pour ordre $pm\varphi$, toute substitution permutable à K le sera à F. On retombera donc sur le cas du N°. 196.

Il faut donc supposer $p = 2$ (Car si p était égal à 1, les substitutions de K étant échangeables entre elles, K serait un faisceau).

D'autre part, les substitutions de Ψ jouissent de la propriété exclusive d'être échangeables à toutes les substitutions de K. Donc toute substitution permutable à K le sera à Ψ; et l'on retombera encore sur le cas du N°. 196, à moins que Ψ ne se réduise à Φ, auquel cas $m = 1$.

F serait donc d'ordre 2φ, et Ψ d'ordre φ. Donc F résulterait de la combinaison de Φ avec une seule substitution de la forme

$$S = |x, y, z \quad ax, -ay, cz|.$$

Cela est impossible. Car K contient une substitution de la forme (139.) laquelle transformera S en

$$S' = |x, y, z \quad -ax, ay, cz|,$$

et Ψ renfermera la substitution

$$S^{-1}S' = |x, y, z \quad -x, -y, z|$$

laquelle n'appartient pas à Φ.

198. Problème. ***Trouver les groupes composés H dont les substitutions sont permutables à un groupe I dérivé de la combinaison d'un faisceau F dont les substitutions ont la forme***

$$(141.) \qquad |x, y, z \quad ax, by, cz|$$

avec des substitutions de la forme

$$(142.) \qquad |x, y, z \quad a'y, b'z, c'x|.$$

On peut choisir les variables y, z de telle sorte que dans l'une des substitutions (142.) on ait $a' = b' = 1$, d'où $c' = 1$,

$$B = |x, y, z \quad y, z, x|.$$

Cela posé, les faisceaux autres que F contenus dans I résultent de l'adjonction à Φ de l'une des substitutions (142.) et ont pour ordre 3φ.

Donc F aura aussi pour ordre 3φ; sinon il serait seul de son espèce, et toute substitution permutable à I l'étant à F, on retomberait sur le cas du N°. 196.

Les substitutions de F seront donc de la forme

$$|x, y, z \quad \theta^{\alpha}x, \theta^{\beta}y, \theta^{-\alpha-\beta}z|$$

où $\theta^3 = 1$ (N°. 156), et résulteront de la combinaison de la substitution θ avec la substitution

$$A = |x, y, z \quad x, \theta y, \theta^2 z|.$$

199. Voyons combien H pourra contenir de substitutions. Soit S l'une d'elles. Elle devra transformer A en une substitution du groupe I, lequel, étant dérivé de θ, A, B, contient 27 substitutions. D'ailleurs A ne peut être transformé en une des puissances de θ, ces puissances jouissant de la propriété exclusive d'être échangeables à toute substitution de I. Donc le nombre m des transformées distinctes de A par les substitutions de H ne peut surpasser 24.

Considérons maintenant celles des substitutions de H qui sont échangeables à A. Soit T l'une d'elles. La substitution B transformant A en θA, sa transformée B' par T, qui est échangeable à A et à θA, produira la même transformation. Ce sera donc une des 9 substitutions de la forme $\theta^{\varrho} A^{\alpha} B$, lesquelles jouissent seules de cette propriété. Donc le nombre n des transformées de B par les substitutions T ne peut surpasser 9.

Enfin celles des substitutions de H qui sont échangeables à A et à B devront multiplier x, y, z par un même facteur, qui sera nécessairement une puissance de θ; elles se réduiront donc aux trois substitutions de Φ.

Cela posé, il est clair que H aura pour ordre $m.n.3$, soit au maximum $24.9.3$.

200. Nous allons effectivement construire un groupe H permutable à I, et d'ordre $24.9.3$.

La substitution B transforme en effet A et B en θA, B.

A les transforme en A, $\theta^2 B$.

D'autre part la substitution

$$C = |x, y, z \quad y, x, z|$$

les transforme en θA^2, B^2.

La substitution

$$D = |x, y, z \quad jx, j\theta^2 y, jz| \quad \text{où } j^3 = \theta$$

les transforme en A, AB.

Enfin la substitution

$$E = \begin{vmatrix} x & a(x+\ \ y+\ \theta z) \\ y & a(x+\theta y+\ \ z) \\ z & a(x+\theta^2 y+\theta^2 z) \end{vmatrix}$$

(où $a^3 = \frac{1}{3(1-\theta^2)}$, de telle sorte que le déterminant soit 1) les transforme en B, A^2B^2.

Cela posé, il est clair que le groupe dérivé de θ, A, B, C, D, E

est permutable à I, et que ses substitutions permettent de transformer A en une quelconque des 24 substitutions de la forme $\theta^\varrho A^\gamma B^\beta$ où α et β ne sont pas nuls tous deux; et que celles qui sont échangeables à A transforment B en une quelconque des 9 substitutions $\theta^\varrho A^\alpha B$. Enfin il contient les puissances de θ, échangeables à A et à B. Son ordre est donc bien 24.9.3.

201. Tout groupe dont les substitutions sont permutables à I est contenu dans H, ainsi qu'on l'a vu. Cherchons quels groupes moindres nous pourrons obtenir.

Remarquons à cet effet que les substitutions de H permutent l'un dans l'autre les 4 groupes α, β, γ, δ respectivement formés de la combinaison de θ avec les substitutions A, B, AB, A^2B.

Les substitutions de I, ainsi que C, ne déplacent pas ces 4 groupes; D opère sur eux la substitution

$$D' = (\beta\gamma\delta)$$

et E la substitution

$$E' = (\alpha\beta\gamma).$$

Les substitutions D', E' combinées ensemble, formeront un groupe H' alterné entre 4 lettres et isomorphe à H.

Soient maintenant h un groupe contenu dans H; h' le groupe correspondant contenu dans H'. Diverses hypothèses seront possibles sur la constitution du groupe h'.

1°. Si h' ne contient aucune substitution binaire, il sera formé tout au plus des puissances d'une substitution circulaire ternaire, par exemple D'. Le groupe h sera exclusivement formé des substitutions θ, A, B, C, D qui leur correspondent, et qui sont permutables au faisceau F. Ce sera donc l'un des groupes du N°. 62.

2°. Si h' contient une substitution binaire, par exemple celle-ci

$$D'E' = (\alpha\beta)(\gamma\delta)$$

h contiendra l'une des substitutions correspondantes de H. Celles-ci sont de la forme DES, S étant une substitution correspondante à l'unité, et par suite égale à T ou CT, T désignant une substitution de I; mais h contient I par hypothèse. Donc il contiendra l'une des deux substitutions DE ou DEC.

Mais s'il contient DE, qui transforme A et B en B et θA^2, il contiendra $(DE)^2A^2$, qui les transforme en θA^2 et B^2, et par suite sera de la forme CT; donc il contient C, et par suite DEC.

Réciproquement, s'il contient DEC, qui transforme A et B en B^2 et θA, il contiendra $(DEC)^2 BA^2$, qui les transforme en θA^2 et B^2, et sera de la forme CT. Donc il contient C, et par suite DE.

Le groupe h contient donc toutes les substitutions θ, A, B, C de H qui correspondent à l'unité dans h'. Il s'obtiendra en leur adjoignant une quelconque des substitutions qui correspondent à chacune des autres substitutions de h', à savoir DE, si h' ne contient pas d'autre substitution binaire que $D'E'$; DE et ED s'il contient en outre la substitution binaire $E'D' = (\alpha\gamma)(\beta\delta)$.

Nous obtenons donc en tout trois groupes nouveaux.

1°. Le groupe H, d'ordre 27.2.12, dérivé de θ, A, B, C, D, E.

2°. Un groupe h d'ordre 27.2.4, dérivé de θ, A, B, C, DE, ED.

3°. Un groupe h_1 d'ordre 27.2.2, dérivé de θ, A, B, C, DE.

202. Remarque. Les 9 substitutions de la forme $A^\alpha B^\beta$, respectivement combinées avec les puissances de θ, forment 9 systèmes, que toutes les substitutions de H permutent les uns dans les autres. Les déplacements de ces systèmes forment un groupe entre 9 lettres, d'ordre 9.2.12 (car les substitutions de H qui ne déplacent pas ces systèmes se réduisent aux puissances de θ). Ce groupe est évidemment identique au groupe *hessien*, déjà rencontré dans des recherches assez variées (points d'inflexion des courbes du 3e ordre, etc.).

203. Théorème. *Il n'existe aucun groupe plus général que H et permutable à ses substitutions.*

En effet, H contient le groupe I formé des 27 substitutions $\theta^\varrho A^\alpha B^\beta$ et auquel toutes ses substitutions sont permutables. Ce groupe I est le seul qui jouisse de ces propriétés.

Supposons en effet qu'on eût un autre groupe analogue I', contenant une substitution S autre que celles de I. S ayant pour ordre une puissance de 3, sa correspondante dans le groupe H' sera une substitution ternaire, telle que D'.

Cela posé, I' contiendrait la transformée de S par B et par suite la substitution $S^{-1}.B^{-1}SB$. Mais S ayant pour correspondante D', transforme B^{-1} en une substitution de la forme $\theta^\varrho(AB)^\alpha$. Donc $S^{-1}B^{-1}SB = \theta^\varrho(AB)^\alpha B$ sera une substitution de I, autre que les puissances de θ. Cette substitution est contenue dans I', ainsi que ses transformées, lesquelles reproduisent évidemment par leur combinaison tout le groupe I. Donc I', contenant en outre S, aurait, contre l'hypothèse, plus de substitutions que I.

Donc toute substitution permutable à H le sera à I, et par suite appartiendra à H.

204. Théorème. *Les substitutions permutables à un groupe I dérivé de substitutions des formes*

$$(143.)\quad |x,\ y,\ z \quad ax,\ by,\ cz|,$$

$$(144.)\quad |x,\ y,\ z \quad a'y,\ b'x,\ c'z|,$$

$$(145.)\quad |x,\ y,\ z \quad a''y,\ b''z,\ c''x|,$$

ne fournissent aucun groupe nouveau.

En effet, les coefficients a, b, c dans les diverses substitutions de la forme (143.) sont des puissances d'une racine irréductible θ d'une certaine équation binôme. Si ϱ est le degré de cette équation, l'ordre du faisceau formé par les substitutions (143.) sera égal à $\frac{\varrho^2}{3}$ ou à ϱ^2 (N°. 76.).

Les autres faisceaux contenus dans I contiendront, soit une substitution de la forme (145.), auquel cas ils seront d'ordre 3φ, soit une substitution de la forme (144.) ou des formes analogues

$$|x,\ y,\ z \quad a'x,\ b'z,\ c'y|,$$

$$|x,\ y,\ z \quad a'z,\ b'y,\ c'x|.$$

Ils résulteront alors de la combinaison de cette substitution avec celles de la forme

$$|x,\ y,\ z \quad ax,\ ay,\ cz|$$

lesquelles sont évidemment les puissances de la substitution

$$|x,\ y,\ z \quad \theta^{-1}x,\ \theta^{-1}y,\ \theta^2 z|$$

dont on a établi l'existence (N°. 76.), et auront pour ordre 2ϱ.

Cela posé, si ϱ contient un facteur autre que 2 ou 3, ou s'il est divisible par 2^2 ou 3^2, l'ordre de F étant différent de 3φ ou de 2ϱ, le faisceau F sera seul de son espèce; et par suite, toute substitution permutable à I l'étant à F, on retombera sur le cas du N°. 196.

Il faudra donc supposer $\varrho = 6$, 3 ou 2.

1°. Si $\varrho = 3$, l'ordre de I étant égal à 6 fois l'ordre de F, sera égal à une puissance de 3 multipliée par 2.

Celles de ses substitutions dont l'ordre est une puissance de 3 formeront (*Sylow*) un seul groupe Γ, évidemment dérivé des substitutions (143.), (145.). Toute substitution permutable à I l'étant à Γ, on retombera sur le cas étudié au N°. 198.

2°. Soit $\varrho = 6$. Celles des substitutions de F dont l'ordre est puissance de 3 seront de la forme

$$(147.) \quad |x, y, z \quad \theta^\alpha x, \theta^\beta y, \theta^{-\alpha-\beta} z|.$$

Si F contient une substitution de cette forme autre que celles de Φ, il contiendra également ses transformées par les substitutions de I, qui combinées ensemble reproduiront toutes les substitutions (147.). Dans ce cas l'ordre de F sera égal à ϱ^2 et $>3\varphi$, $>2\varrho$. Donc F sera seul de son espèce et l'on retombera sur le cas du N°. 196.

3°. Reste à discuter le cas où l'on a $\varrho = 2$ ou bien $\varrho = 6$, mais F ne contenant d'autre substitution ternaire que celles de Φ. F résulte alors de la combinaison de Φ avec un groupe Γ d'ordre 4 dont les substitutions sont de la forme

$$|x, y, z \quad (-1)^\alpha x, (-1)^\beta y, (-1)^{\alpha+\beta} z|.$$

Ce groupe Γ est le seul d'ordre 4 qui soit permutable aux substitutions de I. En effet, soit S une substitution d'ordre puissance de 2 contenue dans I, mais étrangère à Γ. Elle sera de la forme (144.); et combinée avec sa transformée par une des substitutions (145.), elle donnera une substitution de la forme (145.), et dont par suite, l'ordre sera divisible par 3. Le groupe formé par S et ses transformées aura donc son ordre différent de 4.

Le groupe Γ étant seul de son espèce, toute substitution permutable à I le sera à Γ, et l'on retombera sur le cas traité au N°. 196.

205. La recherche des divers groupes H d'ordre fini, et dont les substitutions ont pour déterminant 1 est donc complétement terminée.

Les groupes G, d'ordre fini, dont les substitutions ont un déterminant quelconque, s'en déduiront immédiatement (N°. 63).

Soient en effet H l'un des groupes précédemment trouvés; $1, S, T, \ldots$ les substitutions dont il est dérivé; $a, a', \ldots, n, n', \ldots, p, p', \ldots$ des substitutions qui multiplient toutes les variables x, y, z par un même facteur, respectivement égal aux quantités $a, a', \ldots, n, n', \ldots, p, p', \ldots$ racines de l'unité; le groupe G dérivé des substitutions

$$a, \; a', \; \ldots; \; nS, \; n'S; \; \ldots; \; pT, \; p'T, \; \ldots; \; \ldots$$

sera d'ordre fini; et réciproquement tout groupe d'ordre fini se rattachera de cette façon à l'un des groupes H.

On peut remarquer que les quantités $a, a', \ldots$ étant des racines de l'unité, les quantités $a^\alpha a'^\beta \ldots$ seront les puissances d'une seule d'entre elles,

que nous désignerons par m. Les substitutions dérivées de a, a', ... se réduiront donc aux puissances de la substitution m.

En second lieu, si G contient les substitutions nS, $n'S$, ... il contiendra les substitutions $n^{-1}n'$, ..., lesquelles, multipliant x, y, z par un même facteur, devront se réduire à des puissances de m. On aura donc $n' = m^{\varrho}n$; et les substitutions $n'S = m^{\varrho}nS$, ... étant dérivées de m et de nS pourront être supprimées de la suite des substitutions dont G est dérivé.

On pourra supprimer de même les substitutions $p'T$, etc. Donc G sera dérivé des seules substitutions

$$m, \quad nS, \quad pT, \quad \ldots$$

206. 1°. Cela posé, admettons d'abord que H ait ses substitutions de la forme

$$|x, y, z \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z|.$$

Les substitutions de G seront évidemment de la même forme; et le groupe

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y|$$

à deux variables, étant d'ordre fini, appartiendra à l'un des cinq types du N°. 33.

Soit $U = 0$ une équation différentielle ayant pour groupe G. L'intégrale particulière z étant multipliée dans chaque substitution de ce groupe par un facteur γ racine de l'unité, sera racine d'une équation binôme, dont le second membre sera une fonction rationnelle de la variable t.

Quant aux intégrales x, y, elles seront racines d'équations binômes, dont les seconds membres seront des fonctions rationnelles de t, ou de t et des racines d'une équation auxiliaire, de degré 2, 4 ou 5 (N°. 34).

207. 2° et 3°. Si H est dérivé de substitutions

$$(148.) \qquad |x, y, z \quad ax, by, cz|$$

jointes à une substitution

$$S = |x, y, z \quad a'y, b'z, c'x|$$

ou à la substitution S et à une substitution

$$T = |x, y, z \quad a''y, b''x, c''z|,$$

il en sera évidemment de même de G.

Les permutations opérées entre les variables par les substitutions de G forment un groupe g, de degré 3 et d'ordre 3 ou 6, et isomorphe à G.

Si donc $U = 0$ est une équation différentielle ayant pour groupe G, on pourra par la résolution d'une équation auxiliaire $X = 0$ du troisième degré, réduire G à celles de ses substitutions qui sont de la forme (148.). Cela fait, x, y, z seront devenues les racines d'équations binômes.

208. 4°. Si H est dérivé des substitutions A, B, C des Nos. 187 à 192, seules ou jointes à la substitution θ (où $\theta^3 = 1$), G sera dérivé de substitutions de la forme

$$m, \quad nA, \quad pB, \quad qC.$$

Mais alors il contiendra la substitution

$$(nA)^{-1}(pB)^{-1}nApB \;=\; A^{-2}$$

ainsi que ses transformées par les substitutions de G, ou ce qui revient au même, par les substitutions du groupe dérivé de A, B, C. Ces transformées, combinées entre elles, reproduisent toutes les substitutions du groupe (A, B, C). Il suffit pour s'en assurer, de remarquer que (A, B, C) est isomorphe au groupe alterné entre cinq lettres (N°. 187.), lequel est simple.

Donc G contiendra les substitutions A, B, C, et par suite les substitutions n, p, q, lesquelles, multipliant x, y, z par un même facteur, devront se réduire à des puissances de m. Donc G sera dérivé des substitutions

$$m, \quad A, \quad B, \quad C.$$

Si $U = 0$ est une équation différentielle ayant pour groupe G, la résolution d'une équation du 5e degré $X = 0$ réduira son groupe aux substitutions m, lesquelles multiplient une fonction linéaire quelconque de x, y, z par une même racine de l'unité.

Donc toute intégrale de l'équation $U = 0$ sera racine d'une équation binôme, ayant pour second membre une fonction rationnelle de t et des racines de X.

209. 5°. Si H est dérivé des substitutions θ, A, B, C, D, E du N°. 200, G sera dérivé de substitutions

$$m, \quad nA, \quad pB, \quad qC, \quad rD, \quad sE$$

et contiendra la substitution

$$(qC)^{-1}.(sE)^{-1}.qC.sE \;=\; C^{-1}E^{-1}CE$$

et ses transformées par les substitutions de G. On s'assure aisément que ces transformées, combinées entre elles, reproduisent toutes les substitutions

dérivées de θ, A, B, C, DE, ED. Donc G contiendra ces substitutions, et par suite les substitutions n, p, q et $rs = rD.sE.(DE)^{-1}$, lesquelles devront se réduire à des puissances de m. Donc G sera dérivé des substitutions

$$(149.)\qquad m,\ A,\ B,\ C,\ rD,\ sE.$$

Il contient d'ailleurs la substitution

$$(rD)^3 = r^3.$$

Donc r^3 doit être une puissance de m, qu'on peut supposer égale à 1, m ou m^2; car si l'on avait $r^3 = m^{3k+\varrho}$, on pourrait remplacer dans la suite (149.) la substitution rD par la substitution $m^{-k}rD$, dont le cube se réduit à m^ϱ.

On pourra d'ailleurs supposer $s = r^2$; car rs et r^3 étant des puissances de m, s ne diffère de r^2 que par une puissance de m.

Enfin, la substitution C étant dérivée de la combinaison des autres substitutions de la série, on pourra la supprimer.

210. 6°. Si H est dérivé des substitutions

$$\theta,\ A,\ B,\ C,\ DE$$

du N°. 201, G le sera de substitutions

$$(150.)\qquad m,\ nA,\ pB,\ qC,\ sDE.$$

Il contiendra la substitution

$$(nA)^{-1}.(qC)^{-1}.nA.qC = \theta A$$

et ses transformées par les substitutions de G, lesquelles reproduisent toutes les substitutions dérivées de θ, A, B. On peut donc supposer $n = p = 1$.

D'ailleurs G contient $(sDE)^2A^2$, laquelle est de la forme s^2CT, où T est dérivé de θ, A, B (N°. 201); donc il contient s^2C, et par suite

$$qC(s^2C)^{-1} = qs^{-2}$$

laquelle devra se réduire à une puissance de m. On pourra donc dans la série (150.) effacer la substitution qC, qui résulte de la combinaison des autres.

Enfin G contient $(s^2C)^2 = s^4$, qui devra se réduire à une puissance de m. On pourra la supposer égale à 1, m, m^2 ou m^3.

211. 7°. Si H est dérivé des substitutions

$$\theta,\ A,\ B,\ C,\ DE,\ ED$$

du N°. 201, G le sera des substitutions

$$m,\ nA,\ pB,\ qC,\ sDE,\ tED$$

et l'on pourra supposer comme tout à l'heure $n = p = 1$, et effacer qC de

la série. D'ailleurs G contient la substitution $(tED)^2$, laquelle est de la forme t^2CT. Donc G contient t^2C, et comme il contient d'autre part s^2C on aura $t^2 = s^2m^\varrho$, ϱ pouvant évidemment être supposé égal à 0 ou à 1.

212. Remarquons que dans les trois derniers cas que nous venons d'examiner, H contient la substitution θ, laquelle est une puissance de m. Donc le degré de l'équation binôme dont m est racine est un multiple de 3.

Enfin dans chacun de ces trois derniers cas, il existe un groupe Γ de degré 9, contenu dans le groupe hessien isomorphe à G, et tel que celles des substitutions de G qui y ont l'unité pour correspondante se réduisent aux puissances de m (N°. 202).

Donc si $U = 0$ est une équation différentielle ayant pour groupe G, ses intégrales seront racines d'équations binômes dont les seconds membres sont fonctions rationnelles de t et des racines d'une équation hessienne.

Paris, juin 1877.

Verallgemeinerung einer *Jacobi*schen Formel.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

Zu der schon seit alter Zeit bekannten Formel

$$(1.)\qquad (1+2+\cdots+x)^2 = 1^3+2^3+\cdots+x^3$$

hat zuerst *Jacobi* eine neue ähnliche hinzugefügt (Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Schuhmacher* Bd. 5 p. 299), nämlich

$$(2.)\qquad 2(1+2+\cdots+x)^4 = (1^7+2^7+\cdots+x^7)+(1^5+2^5+\cdots+x^5).$$

Die allgemeine Formel, von welcher die beiden vorhergehenden nur einzelne Fälle sind, scheint noch nicht bekannt zu sein, obgleich sie sehr einfach ist. Setzt man nämlich

$$S_n = 1^n+2^n+\cdots+x^n,$$

$$(n,\nu) = \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{1.2\dots\nu},$$

so hat man

$$(3.)\qquad 2^{n-1}(1+2+\cdots+x)^n = (n,1)S_{2n-1}+(n,3)S_{2n-3}+\cdots+(n,n)S_n,$$

wenn n ungerade, und

$$(4.)\qquad 2^{n-1}(1+2+\cdots+x)^n = (n,1)S_{2n-1}+(n,3)S_{2n-3}+\cdots+(n,n-1)S_{n+1},$$

wenn n gerade.

Dass diese Formeln richtig sind, wenn man $x=1$ setzt, versteht sich von selbst, da sie dann auf die bekannten Sätze zurückkommen, dass, je nachdem n ungerade oder gerade ist, man

$$2^{n-1} = (n,1)+(n,3)+\cdots+(n,n)$$

oder

$$2^{n-1} = (n,1)+(n,3)+\cdots+(n,n-1)$$

hat. Es ist also nur zu zeigen, dass, wenn diese Formeln bis zu einem bestimmten x gelten, sie auch noch für $x+1$ ihre Geltung behalten. Das heisst: es ist zu zeigen, dass, je nachdem n ungerade oder gerade,

$$2^{n-1}[(1+2+\cdots+x+1)^n-(1+2+\cdots+x)^n]$$
$$= (n,1)(x+1)^{2n-1}+(n,3)(x+1)^{2n-3}+\cdots+(n,n)(x+1)^n$$
$$= (x+1)^n[(n,1)(x+1)^{n-1}+\cdots+(n,n)]$$

oder

$$= (n,1)(x+1)^{2n-1} + \cdots + (n, n-1)(x+1)^{n+1}$$
$$= (x+1)^n[(n,1)(x+1)^{n-1} + (n,3)(x+1)^{n-3} + \cdots + (n, n-1)(x+1)].$$

Nun ist

$$2^{n-1}[(1+2+\cdots+x+1)^n - (1+2+\cdots+x)^n] = \frac{(x+1)^n}{2}[(x+2)^n - x^n].$$

Ferner folgt aus

$$x^n = (x+1-1)^n = (x+1)^n - (n,1)(x+1)^{n-1} + \cdots \pm (n,n),$$

wenn n ungerade ist,

$$(n,1)(x+1)^{n-1} + (n,3)(x+1)^{n-3} + \cdots + (n,n)$$
$$= (x+1)^n - x^n + (n,2)(x+1)^{n-2} + \cdots + (n, n-1)(x+1)$$

und mithin

$$x^n + 2[(n,1)(x+1)^{n-1} + (n,3)(x+1)^{n-3} + \cdots + (n,n)]$$
$$= (x+1)^n + (n,1)(x+1)^{n-1} + \cdots + (n,n) = (x+2)^n$$

oder

$$\frac{(x+2)^n - x^n}{2} = (n,1)(x+1)^{n-1} + (n,3)(x+1)^{n-3} + \cdots + (n,n),$$

wodurch die Formel für ungerade n bewiesen ist. Ebenso beweist man sie für gerade n.

Setzt man $n = 2k$, so folgt zugleich aus (4.) in Verbindung mit (1.)

$$2^{2k-1}[1^3+2^3+\cdots+x^3]^k = (2k,1)S_{4k-1} + (2k,3)S_{4k-3} + \cdots + (2k, 2k-1)S_{2k+1}.$$

Ist n gerade, so folgt aus (4.), wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$2^{mn-m}(1+2+\cdots+x)^{mn} = [(n,1)S_{2n-1} + (n,3)S_{2n-3} + \cdots + (n, n-1)S_{n+1}]^m$$

und zugleich, wenn man mn statt n setzt,

$$2^{mn-1}(1+2+\cdots+x)^{mn} = (mn,1)S_{2mn-1} + (mn,3)S_{2mn-3} + \cdots + (mn, mn-1)S_{mn+1},$$

also

$$(5.)\quad \begin{cases} 2^{m-1}[(n,1)S_{2n-1} + (n,3)S_{2n-3} + \cdots + (n, n-1)S_{n+1}]^m \\ = (mn,1)S_{2mn-1} + (mn,3)S_{2mn-3} + \cdots + (mn, mn-1)S_{mn+1}. \end{cases}$$

Da zugleich, je nachdem m gerade oder ungerade ist, auch, wenn man nach (4.) oder (3.) den Werth von $(1+2+\cdots+x)^m$ berechnet, hieraus

$$2^{(m-1)n}(1+2+\cdots+x)^{mn} = (m,1)S_{2m-1} + (m,3)S_{2m-3} + \cdots + (m, m-1)S_{m+1}$$

oder

$$= (m,1)S_{2m-1} + (m,3)S_{2m-3} + \cdots + (m,m)S_m$$

folgt, so ergiebt sich die bemerkenswerthe Formel, dass wenn n gerade:

$$2^m[(n,1)S_{2n-1} + (n,3)S_{2n-3} + \cdots + (n, n-1)S_{n+1}]^m$$
$$= 2^n[(m,1)S_{2m-1} + (m,3)S_{2m-3} + \cdots + (m, m-1)S_{m+1}]^n$$

oder

$$= 2^n[(m,1)S_{2m-1}+(m,3)S_{2m-3}+\cdots+(m,m)S_m]^n,$$

je nachdem m gerade oder ungerade.

Ist n ungerade, so findet man ebenso, je nachdem m gerade oder ungerade,

$$2^{m-1}[(n,1)S_{2n-1}+\cdots+(n,n)S_n]^m = (mn,1)S_{2mn-1}+\cdots+(mn,mn-1)S_{mn+1}$$

oder

$$= (mn,1)S_{2mn-1}+\cdots+(mn,mn)S_{mn}$$

und zugleich

$$2^m[(n,1)S_{2n-1}+\cdots+(n,n)S_n]^m = 2^n[(m,1)S_{2m-1}+\cdots+(m,m-1)S_{m+1}]^n$$

oder

$$= 2^n[(m,1)S_{2m-1}+\cdots+(m,m)S_m]^n.$$

Göttingen, im April 1877.

Ueber die Benutzung einer vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme.

(Von Herrn *Mehler* in Elbing.)

Wenn man eine Umformung durch reciproke Radienvectoren aus einem reellen Centrum mit einer solchen aus einem imaginären Centrum in passender Weise verbindet, so gelangt man zu einer Substitution, welche, wenngleich sie reelle Elemente *eines* räumlichen Gebildes imaginären Elementen eines *anderen* zuordnet, doch zu manchen Zwecken mit Vortheil verwandt werden kann. So kann man mittels derselben von einem orthogonalen Systeme, welches aus einer Schaar (imaginärer) concentrischer Kugelflächen und zwei Schaaren von Kegelflächen besteht, übergehen zu einem aus (reellen) Rotationsflächen und deren Meridianebenen bestehenden Systeme, und zwar entsprechen die Meridianebenen der Schaar von Kugelflächen, die Parallelkreise den geraden und die Meridiancurven den sphärischen Krümmungslinien der Kegelschaaren. Durch die Arbeit des Herrn *Wangerin* im 82. Bande (p. 145–157) dieses Journals wurde ich veranlasst, die erwähnte Substitution, welche ich vor langer Zeit zur Erleichterung gewisser auch durch andere Hülfsmittel auszuführenden Rechnungen benutzte, wieder aufzunehmen, und indem ich dieselbe auf eine beliebige Anzahl von Variablen ausdehnte, erhielt ich einige bemerkenswerthe Resultate. Insbesondere gelang es mir bei Zugrundelegung von vier Variablen (auf welche Zahl ich mich im Folgenden beschränken werde), das von Herrn *Wangerin* und von anderen Gesichtspunkten aus schon früher von den Herren *Darboux* und *Tissérand* behandelte Flächensystem aus den verallgemeinerten elliptischen Polarcoordinaten abzuleiten. Nachträglich bemerkte ich, dass eine reelle Substitution zu ähnlichen, wenn auch nicht identischen Resultaten führt. Ich will mit dieser letzteren beginnen.

I.

1. Es mögen die vier Variablen ξ, η, ζ, ϑ von vier anderen x, y, z, t abhängig gemacht werden durch die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \xi = 2p^2\dfrac{x}{r^2}, \quad \eta = 2p^2\dfrac{y}{r^2}, \quad \zeta = 2p^2\dfrac{z}{r^2}, \\ \vartheta = p+2p^2\dfrac{t-p}{r^2} = p\dfrac{x^2+y^2+z^2+t^2-p^2}{r^2}, \end{cases}$$

in welchen p eine Constante ist und r^2 die Bedeutung hat:

$$r^2 = x^2+y^2+z^2+(t-p)^2.$$

Es ergiebt sich hieraus:

$$(2.)\quad \begin{cases} x = 2p^2\dfrac{\xi}{\varrho^2}, \quad y = 2p^2\dfrac{\eta}{\varrho^2}, \quad z = 2p^2\dfrac{\zeta}{\varrho^2}, \\ t = p+2p^2\dfrac{\vartheta-p}{\varrho^2} = p\dfrac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\vartheta^2-p^2}{\varrho^2}, \\ \varrho^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2+(\vartheta-p)^2 = \dfrac{4p^4}{r^2}. \end{cases}$$

Eine unmittelbare Folge dieser Beziehungen ist die Gleichung:

$$(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\vartheta-\vartheta_1)^2 = 4p^4\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+(t-t_1)^2}{r^2r_1^2},$$

und diese geht für unendlich kleine Werthe der Differenzen $\xi-\xi_1$, $x-x_1$ u. s. w. über in:

$$(3.)\quad d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2+d\vartheta^2 = 4p^4\frac{dx^2+dy^2+dz^2+dt^2}{r^4}.$$

Es mögen ferner ξ, η, ζ, ϑ durch vier neue Variable σ, λ_1, λ_2, λ_3 ausgedrückt werden vermöge der Gleichungen:

$$(4.)\quad \xi = \sigma f, \quad \eta = \sigma f_1, \quad \zeta = \sigma f_2, \quad \vartheta = \sigma f_3,$$

in welchen f, f_1, f_2, f_3 Functionen von λ_1, λ_2, λ_3 sind. Die Summe der Quadrate dieser Functionen sei $=1$, und die Summe der Quadrate ihrer Differentiale habe die Form $L_1d\lambda_1^2+L_2d\lambda_2^2+L_3d\lambda_3^2$, enthalte also nicht die Producte der Differentiale der λ. Man erhält dann:

$$(5.)\quad d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2+d\vartheta^2 = d\sigma^2+\sigma^2(L_1d\lambda_1^2+L_2d\lambda_2^2+L_3d\lambda_3^2),$$

und durch Benutzung von (3.) und der letzten der Gleichungen (2.):

$$(6.)\quad \begin{cases} dx^2+dy^2+dz^2+dt^2 = \dfrac{4p^4}{\varrho^4}\{d\sigma^2+\sigma^2(L_1d\lambda_1^2+L_2d\lambda_2^2+L_3d\lambda_3^2)\}, \\ \varrho^2 = \sigma^2-2\sigma pf_3+p^2. \end{cases}$$

Da nun t zu den neuen Variablen in der Beziehung $t = p\cdot\dfrac{\sigma^2-p^2}{\varrho^2}$ steht, so zeigt sich, dass dem constanten Werthe $t=0$ für alle Werthe der λ der constante Werth $\sigma = p$ (oder auch $\sigma = -p$) entspricht, dass also in diesem

besonderen Falle für $dt = 0$ auch $d\sigma = 0$ wird, und man erhält den folgenden Satz:

Sind f, f_1, f_2, f_3 Functionen von λ_1, λ_2, λ_3, welche die Bedingungen erfüllen:

$$(7.)\quad \begin{cases} f^2+f_1^2+f_2^2+f_3^2 = 1, \\ df^2+df_1^2+df_2^2+df_3^2 = L_1 d\lambda_1^2 + L_2 d\lambda_2^2 + L_3 d\lambda_3^2, \end{cases}$$

und werden die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes im Raume als Functionen der λ dargestellt durch die Gleichungen

$$(8.)\quad x = \frac{pf}{1-f_3},\quad y = \frac{pf_1}{1-f_3},\quad z = \frac{pf_2}{1-f_3},$$

oder die damit gleichbedeutenden

$$(9.)\quad \begin{cases} f = \dfrac{2px}{x^2+y^2+z^2+p^2},\quad f_1 = \dfrac{2py}{x^2+y^2+z^2+p^2}, \\ f_2 = \dfrac{2pz}{x^2+y^2+z^2+p^2},\quad f_3 = \dfrac{x^2+y^2+z^2-p^2}{x^2+y^2+z^2+p^2}, \end{cases}$$

so sind λ_1, λ_2, λ_3 die Parameter dreier orthogonalen Flächenschaaren, und das Quadrat des Linienelementes wird transformirt in:

$$(10.)\quad dx^2+dy^2+dz^2 = p^2\,\frac{L_1 d\lambda_1^2 + L_2 d\lambda_2^2 + L_3 d\lambda_3^2}{(1-f_3)^2}.$$

2. Vermöge des letzten Ausdruckes nimmt die Differentialgleichung $\Delta V = 0$, wenn man zur Abkürzung $\sqrt{L_1 L_2 L_3} = Q$ setzt, die Form an:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{Q}{L_1(1-f_3)}\frac{\partial V}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\frac{Q}{L_2(1-f_3)}\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\left(\frac{Q}{L_3(1-f_3)}\frac{\partial V}{\partial\lambda_3}\right) = 0,$$

und durch die Substitution

$$V = T.\sqrt{1-f_3}$$

geht dieselbe über in:

$$(11.)\quad \Sigma\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{Q}{L}\frac{\partial T}{\partial\lambda}\right) = T\sqrt{1-f_3}\,\Sigma\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{Q}{L}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1-f_3}}\right)\right),$$

wobei die drei Glieder, aus denen jede der beiden Summen besteht, erhalten werden, wenn man λ und L successive mit den Indices 1, 2, 3 versieht. Um den Coefficienten von T auf der rechten Seite der Gleichung zu bestimmen, kann das folgende Verfahren angewandt werden. Die Gleichung (5.) lässt, wie man weiss, sogleich erkennen, dass die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial\vartheta^2} = 0$$

durch die Substitution (4.) übergeführt wird in:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^3\frac{\partial W}{\partial\sigma}\right)+\sigma\Sigma\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{Q}{L}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right) = 0.$$

Nun ist ϱ^{-2} für jeden Werth der Constanten p eine particuläre Lösung dieser Differentialgleichungen, es genügt ihnen also auch der Ausdruck

$$W = \int_0^\infty \frac{\sqrt{p}\,dp}{\varrho^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{p}\,dp}{\sigma^2-2\sigma p f_3+p^2},$$

das heisst:

$$W = \frac{\pi}{\sqrt{2\sigma}\sqrt{1-f_3}}.$$

Daher ist:

$$-\tfrac{3}{4}Q\cdot\frac{1}{\sqrt{1-f_3}}+\Sigma\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{Q}{L}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1-f_3}}\right)\right) = 0,$$

und die Differentialgleichung, welcher T Genüge leistet, gewinnt die folgende Gestalt:

$$(12.)\quad \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{Q}{L_1}\frac{\partial T}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\frac{Q}{L_2}\frac{\partial T}{\partial\lambda_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\left(\frac{Q}{L_3}\frac{\partial T}{\partial\lambda_3}\right)-\tfrac{3}{4}QT = 0.$$

3. Die Anwendung des Vorhergehenden auf den Fall der elliptischen Polarcoordinaten ist unter Benutzung bekannter Hülfsmittel*) leicht zu bewerkstelligen. Wenn die Gleichung:

$$\frac{f^2}{\alpha-\lambda}+\frac{f_1^2}{\beta-\lambda}+\frac{f_2^2}{\gamma-\lambda}+\frac{f_3^2}{\delta-\lambda} = \frac{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\delta-\lambda)}$$

für jeden Werth von λ bestehen soll, so genügen die Quadrate der f nicht nur der ersten der Bedingungsgleichungen (7.), wie man findet, wenn man $\lambda = \infty$ setzt, sondern auch drei anderen linearen Gleichungen, die man durch die Annahmen $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ erhält. Man findet ferner bekanntlich drei andere wichtige Relationen, wenn man die obige identische Gleichung zuerst nach λ differentiirt und dann erst $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ setzt. Vermöge der elementarsten Eigenschaften der Partialbrüche ergeben sich für $f^2,\ f_1^2, \dots$ die folgenden Werthe

$$(13.)\quad \begin{cases} f^2 = \dfrac{(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)(\alpha-\lambda_3)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}, & f_2^2 = \dfrac{(\gamma-\lambda_1)(\gamma-\lambda_2)(\gamma-\lambda_3)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}, \\ f_1^2 = \dfrac{(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2)(\beta-\lambda_3)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}, & f_3^2 = \dfrac{(\delta-\lambda_1)(\delta-\lambda_2)(\delta-\lambda_3)}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}. \end{cases}$$

---

*) Die allgemeinen elliptischen Coordinaten sind in *Jacobis* „Vorlesungen über Dynamik" (p. 198 sq.) eingehend behandelt; elliptische Polarcoordinaten für beliebig viele Variable sind von Herrn *Heine* in seiner Abhandlung „Die *Lamé*schen Functionen verschiedener Ordnungen" (dieses Journal, Bd. 60) angewendet worden.

Damit dieselben positiv seien, müssen die Parameter λ_1, λ_2, λ_3 sich innerhalb der drei Intervalle bewegen, welche zwischen den ihrer Grösse nach geordneten vier Constanten α, β, γ, δ enthalten sind. Man findet nun, wenn man die oben nur angedeuteten Gleichungen benutzt und zur Abkürzung

$$\frac{d\lambda^2}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\delta-\lambda)} = d\eta^2$$

setzt, dass $L_1 d\lambda_1^2 + L_2 d\lambda_2^2 + L_3 d\lambda_3^2$ gleich wird

$$\tfrac{1}{4}(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\left(\frac{d\eta_1^2}{\lambda_2-\lambda_3}+\frac{d\eta_2^2}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{d\eta_3^2}{\lambda_1-\lambda_2}\right),$$

und erhält für $T = V:\sqrt{1-f_3}$ aus (12.) die Differentialgleichung

$$(\lambda_2-\lambda_3)\frac{\partial^2 T}{\partial\eta_1^2}+(\lambda_3-\lambda_1)\frac{\partial^2 T}{\partial\eta_2^2}+(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial^2 T}{\partial\eta_3^2}-\tfrac{3}{16}(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)T = 0,$$

welche auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(14.)\qquad \Sigma(\lambda_2-\lambda_3)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\eta_1^2}+\tfrac{3}{16}\lambda_1^2 T\right) = 0,$$

wobei die beiden nicht angeführten Glieder der Summe aus dem ersten durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehen.

Setzt man in die oben erwähnten linearen Gleichungen, denen die Quadrate der f genügen, die in (9.) enthaltenen Ausdrücke ein, so gehen dieselben über in:

$$(15.)\qquad \frac{4p^2x^2}{\alpha-\lambda_1}+\frac{4p^2y^2}{\beta-\lambda_1}+\frac{4p^2z^2}{\gamma-\lambda_1}+\frac{(x^2+y^2+z^2-p^2)^2}{\delta-\lambda_1} = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

Die Identität des durch diese Gleichungen dargestellten orthogonalen Flächensystems mit dem in der Abhandlung des Herrn *Wangerin* betrachteten Systeme ist leicht nachzuweisen. Wenn aber die daselbst mit D^2 bezeichnete Grösse positiv ist (dies findet gerade in dem dort ausführlich behandelten Falle statt), so muss man p^2 einen rein imaginären und den übrigen Constanten, sowie den Parametern, complexe Werthe beilegen, und die formell noch bestehende Vereinfachung der Differentialgleichung wird für physikalische Probleme illusorisch. Weiter unten werde ich jedoch zeigen, dass auf anderem Wege auch im Falle eines positiven D^2 die Differentialgleichung einer entsprechenden Reduction fähig ist.

4. Sobald vier Functionen f, f_1, f_2, f_3 bekannt sind, welche den Bedingungen (7.) genügen, so lassen sich an deren Stelle mittels einer

linearen orthogonalen Substitution vier andere:

$$(16.)\quad \begin{cases} F = \mathfrak{a}f + \mathfrak{a}_1 f_1 + \mathfrak{a}_2 f_2 + \mathfrak{a}_3 f_3, & F_2 = \mathfrak{c}f + \mathfrak{c}_1 f_1 + \mathfrak{c}\, f_2 + \mathfrak{c}_3 f_3, \\ F_1 = \mathfrak{b}f + \mathfrak{b}_1 f_1 + \mathfrak{b}_2 f_2 + \mathfrak{b}_3 f_3, & F_3 = \mathfrak{d}f + \mathfrak{d}_1 f_1 + \mathfrak{d}_2 f_2 + \mathfrak{d}_3 f_3 \end{cases}$$

einführen und diese bestimmen ein neues orthogonales System, in welchem die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes X, Y, Z heissen mögen. Löst man die aus (9.) durch die angegebenen Veränderungen hervorgehenden Gleichungen nach $f, \dots f_3$ auf und setzt zur Abkürzung

$$P = 2p(\mathfrak{a}X + \mathfrak{b}Y + \mathfrak{c}Z) + \mathfrak{d}(X^2 + Y^2 + Z^2 - p^2),$$
$$P_1 = 2p(\mathfrak{a}_1 X + \mathfrak{b}_1 Y + \mathfrak{c}_1 Z) + \mathfrak{d}_1(X^2 + Y^2 + Z^2 - p^2) \quad \text{u. s. w.,}$$

so wird das neue System durch die Gleichungen bestimmt:

$$(9'.)\quad \begin{cases} f = \dfrac{P}{X^2 + Y^2 + Z^2 + p^2}, & f_2 = \dfrac{P_2}{X^2 + Y^2 + Z^2 + p^2}, \\ f_1 = \dfrac{P_1}{X^2 + Y^2 + Z^2 + p^2}, & f_3 = \dfrac{P_3}{X^2 + Y^2 + Z^2 + p^2}. \end{cases}$$

Zwischen den Coordinaten entsprechender Punkte beider Systeme finden also die folgenden Beziehungen Statt:

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{P}{2px} = \dfrac{P_1}{2py} = \dfrac{P_2}{2pz} = \dfrac{P_3}{x^2 + y^2 + z^2 - p^2} = \dfrac{X^2 + Y^2 + Z^2 + p^2}{x^2 + y^2 + z^2 + p^2} \\ = \dfrac{1 - \mathfrak{d}_3}{2p^2} \cdot \left\{ \left(X - \dfrac{p\mathfrak{a}_3}{1 - \mathfrak{d}_3}\right)^2 + \left(Y - \dfrac{p\mathfrak{b}_3}{1 - \mathfrak{d}_3}\right)^2 + \left(Z - \dfrac{p\mathfrak{c}_3}{1 - \mathfrak{d}_3}\right)^2 \right\}, \end{cases}$$

und der gemeinschaftliche Werth dieser Ausdrücke giebt zugleich den Werth des Verhältnisses an, in welchem die Linienelemente zu einander stehen, wie leicht daraus hervorgeht, dass $\Sigma dF^2 = \Sigma df^2$, also nach (10.)

$$\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{(1 - f_3)^2}{(1 - F_3)^2}$$

ist. Wenn man in obigen Gleichungen die Coordinaten (x, y, z) des einen Systems um je eine Constante vermehrt, so enthalten dieselben 10 von einander unabhängige Constante und repräsentiren eine Umformung durch reciproke Radienvectoren aus einem beliebigen Centrum verbunden mit einer beliebigen Verschiebung und Drehung. Zieht man aber nur die Gestalt der Flächen und nicht auch ihre Lage im Raume in Betracht, so kann man sagen, dass aus einem gegebenen Systeme durch (9'.) oder (17.) nur solche Flächen gewonnen werden können, welche auch durch eine einfache Umformung durch reciproke Radienvectoren sich daraus ableiten lassen.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Gleichungen $P = 0, \ldots, P_3 = 0$ vier Kugelflächen darstellen, von denen jede die andere rechtwinklig schneidet, und für welche der Anfangspunkt der Coordinaten der Potenzpunkt ist. Man kann auch $X^2+Y^2+Z^2+p^2 = 0$ als die Gleichung einer fünften mit jenen vier ebenfalls orthogonalen Kugelfläche auffassen. Herr *Darboux* hat schon vor einer Reihe von Jahren die Potenzen eines Punktes in Bezug auf fünf orthogonale Kugeln als homogene Coordinaten des Punktes eingeführt und zu umfassenden Untersuchungen namentlich über die Gattung von Flächen, welche er Cycliden nennt, benutzt. In einer in den Comptes Rendus (1876, II, No. 22 und 23) mitgetheilten Abhandlung wendet er diese Coordinaten an, um in die Differentialgleichung $\Delta V = 0$ die Parameter des allgemeinsten Systems orthogonaler Cycliden einzuführen. Wenngleich ich aus dieser Abhandlung und nach Einsicht des dort citirten Werkes des Herrn *Darboux* erkenne, dass meine Arbeit mich in vielen Punkten nur zu bekannten Resultaten geführt hat, so glaube ich doch, dass auch der von mir eingeschlagene Weg der Untersuchung einige Beachtung verdient.

5. Aus den elliptischen Coordinaten erhält man, wenn man (9'.) statt (9.) in Anwendung bringt, das orthogonale Flächensystem

$$(18.)\qquad \frac{P^2}{\alpha-\lambda}+\frac{P_1^2}{\beta-\lambda}+\frac{P_2^2}{\gamma-\lambda}+\frac{P_3^2}{\delta-\lambda} = 0.$$

Herr *Darboux* giebt die Gleichung des allgemeinsten Systems orthogonaler Cycliden in der Form

$$\sum_1^5 \frac{x_i^2}{\varrho-a_i} = 0.$$

Eliminirt man hieraus x_5 mit Hülfe der zwischen den x bestehenden Relation $\Sigma x_i^2 = 0$, und setzt dann

$$\varrho-a_5 = \frac{1}{\lambda} \quad\text{und}\quad a_i-a_5 = \frac{1}{\alpha_i} \quad (\text{für } i<5),$$

so entsteht:

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{\alpha_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{\alpha_3-\lambda}+\frac{x_4^2}{\alpha_4-\lambda} = 0.$$

Da die Grössen P, P_1, P_2, P_3 dieselbe geometrische Bedeutung und (wenn man zu X, Y, Z je eine Constante addirt) dieselbe Allgemeinheit besitzen, wie die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4, so können die allgemeinsten orthogonalen Cyclidenschaaren auch unter der Form (18.) dargestellt werden. Die

Differentialgleichung $\Delta V = 0$ wird offenbar auch hier auf die in (14.) angegebene Form reducirt, wenn zwischen V und T die Beziehung

$$V = T\sqrt{1-F_3} = T\sqrt{1-\mathfrak{d}f-\mathfrak{d}_1 f_1-\mathfrak{d}_2 f_2-\mathfrak{d}_3 f_3}$$

besteht, während f, f_1, f_2, f_3 die in (13.) angegebenen Werthe besitzen.

II.

1. Die imaginäre Substitution, zu welcher ich jetzt übergehe, kann gebildet werden durch Combination der beiden folgenden:

$$\xi = \frac{2p^2x'}{r'^2},\quad \eta = \frac{2p^2y'}{r'^2},\quad \zeta_1 = p\,\frac{p^2-x'^2-y'^2-z'^2-t'^2}{r'^2},$$

$$\zeta_2 = \frac{2p^2z'}{r'^2},\quad r'^2 = x'^2+y'^2+z'^2+(t'+p)^2$$

und:

$$x' = -\frac{2p^2x}{r^2},\quad y' = -\frac{2p^2y}{r^2},\quad t' = -\frac{2p^2z_1}{r^2},$$

$$z' = ip-2p^2\,\frac{z_2-ip}{r^2} = ip\,\frac{x^2+y^2+z_1^2+z_2^2+p^2}{r^2},$$

$$r^2 = x^2+y^2+z_1^2+(z_2-ip)^2.$$

Man findet aus den letzten Gleichungen leicht, dass:

$$x'^2+y'^2+z'^2+t'^2+p^2 = -\frac{4ip^3z_2}{r^2},$$

und hieraus durch Addition des Werthes von $2pt'$:

$$\text{(1.)}\qquad r'^2r^2 = -4p^3(z_1+iz_2),$$

und die resultirende Substitution und deren Umkehrung erhalten die folgenden Formen:

$$\text{(2.)}\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{px}{z_1+iz_2}, & x = \dfrac{p\xi}{\zeta_1+i\zeta_2}, \\[2mm] \eta = \dfrac{py}{z_1+iz_2}, & y = \dfrac{p\eta}{\zeta_1+i\zeta_2}, \\[2mm] \zeta_1 = \dfrac{p^2-x^2-y^2-z_1^2-z_2^2}{2(z_1+iz_2)}, & z_1 = \dfrac{p^2-\xi^2-\eta^2-\zeta_1^2-\zeta_2^2}{2(\zeta_1+i\zeta_2)}, \\[2mm] \zeta_2 = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{p^2+x^2+y^2+z_1^2+z_2^2}{2(z_1+iz_2)}, & z_2 = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{p^2+\xi^2+\eta^2+\zeta_1^2+\zeta_2^2}{2(\zeta_1+i\zeta_2)}. \end{cases}$$

Bemerkenswerth sind die Relationen

$$\text{(3.)}\qquad (\zeta_1+i\zeta_2)(z_1+iz_2) = p^2,$$

$$\text{(4.)}\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta_1^2+\zeta_2^2 = -p^2\,\frac{z_1-iz_2}{z_1+iz_2}.$$

Unter Benutzung der Gleichung (1.) erhält man durch zweimalige Anwendung der Gleichung (3.) des ersten Abschnittes:

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta_1^2+d\zeta_2^2 = p^2\frac{dx^2+dy^2+dz_1^2+dz_2^2}{(z_1+iz_2)^2}.$$

Setzt man jetzt $z_1 = z\cos\varphi$, $z_2 = z\sin\varphi$, so wird

$$(5.)\qquad d\xi^2+d\eta^2+d\zeta_1^2+d\zeta_2^2 = p^2e^{-2\varphi i}\Big(d\varphi^2+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}\Big),$$

zugleich aber geht (4.) über in:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta_1^2+\zeta_2^2 = -p^2e^{-2\varphi i},$$

und daher ist es erlaubt zu setzen:

$$(6.)\qquad \xi = pe^{-\varphi i}g,\quad \eta = pe^{-\varphi i}g_1,\quad \zeta_1 = pe^{-\varphi i}g_2,\quad \zeta_2 = -ipe^{-\varphi i}g_3,$$

wenn g, g_1, g_2, g_3 solche Functionen dreier unabhängigen Variablen μ_1, μ_2, μ_3 vorstellen, durch welche die Bedingungsgleichung

$$(7.)\qquad g_3^2-g^2-g_1^2-g_2^2 = 1$$

identisch erfüllt wird. Ist nun ferner

$$(8.)\qquad dg^2+dg_1^2+dg_2^2-dg_3^2 = M_1d\mu_1^2+M_2d\mu_2^2+M_3d\mu_3^2,$$

so erhält man für $d\xi^2+\cdots$ den folgenden Ausdruck

$$(9.)\qquad d\xi^2+d\eta^2+d\zeta_1^2+d\zeta_2^2 = p^2e^{-2\varphi i}(d\varphi^2+M_1d\mu_1^2+M_2d\mu_2^2+M_3d\mu_3^2).$$

Wenn man nun einerseits (2.) mit (6.) und andererseits (5.) mit (9.) in Verbindung bringt, so fällt das Imaginäre und zugleich die Variable φ aus den Resultaten heraus, und man gelangt zu dem folgenden Satze:

Genügen g, g_1, g_2, g_3 den Bedingungen (7.) und (8.), und bedeuten x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume, so wird durch die Gleichungen

$$g = \frac{x}{z},\quad g_2 = \frac{p^2-(x^2+y^2+z^2)}{2pz},$$
$$g_1 = \frac{y}{z},\quad g_3 = \frac{p^2+(x^2+y^2+z^2)}{2pz},$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$x = \frac{pg}{g_2+g_3},\quad y = \frac{pg_1}{g_2+g_3},\quad z = \frac{p}{g_2+g_3}$$

ein orthogonales Flächensystem mit den Parametern μ_1, μ_2, μ_3 bestimmt, und das Quadrat des Linienelementes hat die Form

$$dx^2+dy^2+dz^2 = p^2\frac{M_1d\mu_1^2+M_2d\mu_2^2+M_3d\mu_3^2}{(g_2+g_3)^2}.$$

2. Die Transformation der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ kann hier noch etwas einfacher als im vorigen Abschnitt ausgeführt werden. Die Gleichungen (5.) und (9.) liefern nämlich für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_1^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_2^2} = 0$$

die folgenden beiden Umformungen:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\frac{e^{2\varphi i}}{z^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(e^{-2\varphi i}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1}\left(\frac{N}{M_1}\frac{\partial W}{\partial \mu_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \mu_2}\left(\frac{N}{M_2}\frac{\partial W}{\partial \mu_2}\right)+\frac{\partial}{\partial \mu_3}\left(\frac{N}{M_3}\frac{\partial W}{\partial \mu_3}\right)+Ne^{2\varphi i}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(e^{-2\varphi i}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

worin $N=\sqrt{M_1 M_2 M_3}$. Setzt man nun in diesen beiden Differentialgleichungen respective

$$W = e^{\frac{1}{2}\varphi i}V.\sqrt{z} \quad \text{und} \quad W = e^{\frac{1}{2}\varphi i}T,$$

und macht die offenbar zulässige Voraussetzung, dass V und T beide von φ unabhängig sind, so gehen dieselben über in:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1}\left(\frac{N}{M_1}\frac{\partial T}{\partial \mu_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \mu_2}\left(\frac{N}{M_2}\frac{\partial T}{\partial \mu_2}\right)+\frac{\partial}{\partial \mu_3}\left(\frac{N}{M_3}\frac{\partial T}{\partial \mu_3}\right)+\tfrac{3}{4}NT = 0.$$

Diese Form also nimmt die Gleichung $\Delta V = 0$ an, wenn durch die Substitution

$$V = T\sqrt{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\sqrt{p}}T\sqrt{g_2+g_3}$$

an Stelle des Potentials V die Function T eingeführt wird.

3. Die Anwendung auf die elliptischen Polarcoordinaten erfordert fast keine neuen Rechnungen. Man bildet die für $-g^2$, $-g_1^2$, $-g_2^2$, g_3^2 zu benutzenden Werthe, wenn man in den vorher für f^2, f_1^2, f_2^2, f_3^2 aufgestellten λ durch μ ersetzt und durch die richtige Auswahl der Intervalle dafür sorgt, dass g, g_1, g_2, g_3 reelle Werthe vorstellen. Es sind hier von den fünf Intervallen, in welche die Werthe α, β, γ, δ die von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnte Zahlenlinie theilen, diejenigen beiden auszuscheiden, welche δ zur gemeinschaftlichen Grenze haben, und die drei übrig bleibenden sind durch die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 zu besetzen. Es erscheint überflüssig, die sich so ergebenden Resultate niederzuschreiben.

Man kann jedoch zu einem reellen Flächensystem auch dadurch gelangen, dass man den Parametern und einem Theile der Constanten ima-

ginäre Werthe beilegt, und dieser Fall bedarf einer kurzen Erörterung. Man setze, was ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit statthaft ist, $\gamma = 1$, $\delta = -1$, und verwandele gleichzeitig μ, α, β, p^2 in $i\mu$, $i\alpha$, $i\beta$, ip^2, also p in $(1+i)p\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; dann erhält man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
g &= \sqrt{\frac{(\alpha-\mu_1)(\alpha-\mu_2)(\alpha-\mu_3)}{(\beta-\alpha)(1+\alpha^2)}}, & x &= \frac{p\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)g}{g_3+g_2},\\
g_1 &= \sqrt{\frac{(\beta-\mu_1)(\beta-\mu_2)(\beta-\mu_3)}{(\alpha-\beta)(1+\beta^2)}}, & y &= \frac{p\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)g_1}{g_3+g_2},\\
g_2 &= i\sqrt{\frac{(1-i\mu_1)(1-i\mu_2)(1-i\mu_3)}{2(1-i\alpha)(1-i\beta)}}, & z &= \frac{p\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)}{g_3+g_2},\\
g_3 &= \sqrt{\frac{(1+i\mu_1)(1+i\mu_2)(1+i\mu_3)}{2(1+i\alpha)(1+i\beta)}}, & R^2 &= \frac{ip^2(g_3-g_2)}{g_3+g_2}.
\end{aligned}$$

In der letzten derselben ist $R^2 = x^2+y^2+z^2$, und die Intervalle können hier unbeschadet der Allgemeinheit durch die Ungleichheiten

$$\infty > \mu_1 > \alpha > \mu_2 > \beta > \mu_3 > -\infty$$

bestimmt werden. Es behalten hier nur g und g_1 reelle Werthe, während g_2 und g_3 complexe Grössen sind. Setzt man aber

$$g_3 = (\mathfrak{A}+i\mathfrak{B})\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad g_2 = i(\mathfrak{A}-i\mathfrak{B})\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ leicht zu bestimmende reelle Functionen von μ_1, μ_2, μ_3, und die Formeln, welche die Coordinaten explicite durch die Parameter ausdrücken, gehen über in

$$x = \frac{pg}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}, \quad y = \frac{pg_1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}, \quad z = \frac{p}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}, \quad R^2 = p^2\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.$$

Als Gleichung des orthogonalen Systems erhält man:

$$\frac{4p^2x^2}{\alpha-\mu} + \frac{4p^2y^2}{\beta-\mu} + \frac{(x^2+y^2+z^2-ip^2)^2}{1-i\mu} + \frac{(x^2+y^2+z^2+ip^2)^2}{1+i\mu} = 0,$$

oder:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + 2p^2\frac{1+\alpha\mu}{\alpha-\mu}x^2 + 2p^2\frac{1+\beta\mu}{\beta-\mu}y^2 + 2p^2\mu z^2 = p^4.$$

Der Uebergang von dieser Gleichungsform zu der von Herrn *Wangerin* gewählten

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + \frac{a\lambda-4D^2}{\lambda+a}x^2 + \frac{b\lambda-4D^2}{\lambda+b}y^2 + \frac{c\lambda-4D^2}{\lambda+c}z^2 = D^2$$

wird vermittelt durch die Substitutionen

$$p^2 = D, \quad \alpha = \frac{4D^2+ac}{2D(a-c)}, \quad \beta = \frac{4D^2+bc}{2D(b-c)}, \quad \mu = \frac{c\lambda-4D^2}{2D(\lambda+c)},$$

und man sieht, dass μ und λ sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden würden, wenn man $c = \infty$ setzte, eine Annahme, die zwar nicht ohne Störung der Symmetrie aber doch ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gemacht werden kann.

Die transformirte Differentialgleichung kann aus (14.) durch Buchstabenvertauschung entnommen werden. Sie heisst:

$$\Sigma(\mu_2 - \mu_3)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} + \tfrac{3}{16}\mu_1^2 T\right) = 0,$$

wenn

$$V = T\sqrt{\frac{1}{z}} = \frac{T}{\sqrt{p}}\sqrt{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}},$$

$$d\mu^2 = (\alpha - \mu)(\beta - \mu)(1+\mu^2)\,d\varepsilon^2.$$

Will man dieselbe durch Producte von der Form $F_1(\mu_1)F_2(\mu_2)F_3(\mu_3)$ integriren, so sind die Functionen F durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$h(\mu)\frac{d^2F}{d\mu^2} + \tfrac{1}{2}h'(\mu)\frac{dF}{d\mu} + (\tfrac{3}{16}\mu^2 + C\mu + C')F = 0$$

zu bestimmen, worin $h(\mu)$ die ganze Function vierten Grades

$$(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(1+\mu^2)$$

bedeutet.

Zusatz. Herr *Darboux* stellt sich in der neuesten Nummer der Comptes Rendus (1877, No. 7) die Aufgabe, *alle* orthogonalen Flächensysteme zu bestimmen, für welche die Differentialgleichung $\Delta V = 0$ unendlich viele Lösungen von der Form $Nf(\varrho)f_1(\varrho_1)f_2(\varrho_2)$ zulässt. Ich verweise auf die von Herrn *Darboux* mitgetheilten wichtigen Resultate.

Elbing, den 21. Februar 1877.

Der *Malus*sche Satz und die Gleichungen der dadurch definirten Flächen.

(Von Herrn *O. Röthig.*)

Seien gegeben $(s+1)$ brechende Mittel $n_1, n_2, \dots, n_{s+1}$. Gleichzeitig bedeute n_ν den Brechungsexponenten aus Luft in das betreffende Mittel n_ν für alle ν von 0 bis $s+1$.

Die Trennungsfläche des Mittels n_ν vom Mittel $n_{\nu+1}$ habe in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem die Gleichung:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varphi_\nu(x, y, z) = 0 \\ \text{für alle } \nu \text{ von } \nu = 1 \text{ bis } \nu = s.^{*)} \end{cases}$$

Das Mittel n_1 wird durchlaufen von den einfallenden Strahlen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\alpha_1} = \dfrac{y-y_0}{\beta_1} = \dfrac{z-z_0}{\gamma_1}, \\ \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1. \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 sind feste gegebene Werthe, so dass das Strahlenbüschel (2.) durch *einen festen Punkt* geht. $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bedeuten die Cosinus der Winkel, welche jeder der Strahlen (2.) mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen bildet, oder drei Parameter, unter sich verbunden durch die zweite Gleichung (2.) im übrigen willkürlich.

Das Strahlenbüschel (2.) fällt ein auf φ_1 und wird dort gebrochen. Es durchläuft dann das Mittel n_2, wird gebrochen an φ_2, durchläuft das Mittel n_3, wird gebrochen an φ_3 u. s. f., schliesslich durchläuft es das Mittel n_s, wird gebrochen an φ_s, und fährt aus in das Mittel n_{s+1}.

Seien die Gleichungen des das Mittel n_ν durchlaufenden Strahlenbündels:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{x-x_{\nu-1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{y-y_{\nu-1}}{\beta_\nu} = \dfrac{z-z_{\nu-1}}{\gamma_\nu}, \\ \alpha_\nu^2+\beta_\nu^2+\gamma_\nu^2 = 1. \end{cases}$$

$x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, z_{\nu-1}$ sind die Coordinaten *des Punktes der Fläche* $\varphi_{\nu-1}$ von

*) Finden an einigen dieser Flächen nicht Brechungen sondern Reflexionen statt, so sind die zugehörigen n gleich -1 zu setzen.

welchem ein bestimmter Strahl des Bündels (3.) ausgeht. α_ν, β_ν, γ_ν sind die Cosinus der Winkel, welche dieser Strahl mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen bildet.

Jeder der Strahlen (3.) trifft einen Punkt der Trennungsfläche des Mittels n_ν vom Mittel $n_{\nu+1}$, deren Gleichung in (1.) gegeben ist. Bezeichnet man die Coordinaten dieser Punkte mit x_ν, y_ν, z_ν, so sind dies für jeden einzelnen der Strahlen (3.)

(4.) *die Werthe, welche dem Systeme* (3.) *und* (1.) *zugleich genügen.*

Die Gleichungen des das Mittel $n_{\nu+1}$ durchlaufenden Strahlenbündels sind dann*):

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{x-x_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \dfrac{y-y_\nu}{\beta_{\nu+1}} = \dfrac{z-z_\nu}{\gamma_{\nu+1}}, \\ \alpha_{\nu+1}^2+\beta_{\nu+1}^2+\gamma_{\nu+1}^2 = 1. \end{cases}$$

Hierin ist:

$$(6.)\quad \alpha_{\nu+1} = \frac{\varrho_\nu}{R_\nu}\cdot\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu}+\varkappa_\nu\alpha_\nu;\quad \beta_{\nu+1} = \frac{\varrho_\nu}{R_\nu}\cdot\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_\nu}+\varkappa_\nu\beta_\nu;\quad \gamma_{\nu+1} = \frac{\varrho_\nu}{R_\nu}\cdot\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z_\nu}+\varkappa_\nu\gamma_\nu.$$

---

*) Das oben folgende Resultat ist hergeleitet in dem Werke: *Röthig*, die Probleme der Brechung und Reflexion, Leipzig 1876 bei *Teubner*. Zwar ist es dort in etwas anderer Form gegeben. Es soll daher hier kurz gezeigt werden, dass das dortige Resultat mit dem oben folgenden identisch ist. Zu diesem Zwecke citire ich Stellen des erwähnten Werkes mit dem Zusatz „d. B." und Stellen der hier vorliegenden Abhandlung mit dem Zusatz „d. A.".

Die in (3.) pag. 33 d. B. eingeführten Grössen a_ν, b_ν, c_ν sind hier nach (3.) d. A. ersetzt, respective durch $x_{\nu-1}$, $y_{\nu-1}$, $z_{\nu-1}$. Desshalb wird nach (10^a.) pag. 34 d. B.:

$$L_\nu = \frac{1}{R_\nu}\left[(x_\nu-x_{\nu-1})\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu}+(y_\nu-y_{\nu-1})\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_\nu}+(z_\nu-z_{\nu-1})\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z_\nu}\right].$$

Hieraus folgt mit (8.) d. A.

$$L_\nu = \frac{r_\nu}{R_\nu}\left[\alpha_\nu\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu}+\beta_\nu\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_\nu}+\gamma_\nu\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z_\nu}\right] = r_\nu\cos B_\nu$$

wegen (7.) d. A. Wendet man dies und die Gleichungen (6.) d. A. auf die in (5.) pag. 104 d. B. gegebenen Werthe von $a_{\nu+1}$, $b_{\nu+1}$, $c_{\nu+1}$ an, so folgt:

$$a_{\nu+1} = x_{\nu-1}+r_\nu\alpha_\nu+\sigma_\nu\alpha_{\nu+1};\quad b_{\nu+1} = y_{\nu-1}+r_\nu\beta_\nu+\sigma_\nu\beta_{\nu+1};\quad c_{\nu+1} = z_{\nu-1}+r_\nu\gamma_\nu+\sigma_\nu\gamma_{\nu+1}.$$

Mit (8.) d. A. folgt hieraus:

$$\frac{a_{\nu+1}-x_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{b_{\nu+1}-y_\nu}{\beta_{\nu+1}} = \frac{c_{\nu+1}-z_\nu}{\gamma_{\nu+1}} = \sigma_\nu.$$

Schreibt man für die in (8.) pag. 34 d. B. gegebenen Gleichungen der das Mittel $n_{\nu+1}$ durchlaufenden Strahlen die folgenden:

$$\frac{x-a_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{y-b_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}} = \frac{z-c_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+1}},$$

so entstehen durch Addition dieser Gleichungen mit den unmittelbar vorhergehenden sofort die oben in (5.) aufgestellten Gleichungen.

$$(7.)\quad \begin{cases} \varkappa_\nu = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}; \quad \varrho_\nu = -\varkappa_\nu \cos B_\nu + \sqrt{1-\varkappa_\nu^2 \sin^2 B_\nu}, \\ \cos B_\nu = \frac{1}{R_\nu}\left[\alpha_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} + \beta_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y_\nu} + \gamma_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z_\nu}\right]; \\ R_\nu^2 = \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z_\nu}\right)^2. \end{cases}$$

Die Zeichen $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu}$, etc. bedeuten, dass nach der partiellen Differentiation von φ_ν nach x, etc. an Stelle von x, y, z die in (4.) bestimmten Grössen x_ν, y_ν, z_ν zu setzen sind. Das Vorzeichen von R_ν ist so zu wählen, dass $\cos B_\nu$ positiv wird. Die Wurzel in ϱ_ν ist absolut zu nehmen. Endlich gelten die Gleichungen (5.) für alle ν von $\nu = 0$ nach (2.) bis $\nu = s$, während (6.) und (7.) von $\nu = 1$ bis $\nu = s$ gültig sind.

Um die Gleichungen der in das Mittel n_{s+1} ausfahrenden Strahlen aufzustellen, hat man die s Aufgaben (4.) zu lösen. Hierzu sei:

$$(8.)\quad \begin{cases} \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{\alpha_\nu} = \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{\beta_\nu} = \frac{z_\nu - z_{\nu-1}}{\gamma_\nu} = r_\nu, \\ \text{von } \nu = 1 \text{ bis } \nu = s. \end{cases}$$

Dann ist wegen (4.) r_ν bestimmt durch die Gleichung:

$$(9.)\quad \varphi_\nu[x_{\nu-1} + \alpha_\nu r_\nu,\ \ y_{\nu-1} + \beta_\nu r_\nu,\ \ z_{\nu-1} + \gamma_\nu r_\nu] = 0.$$

x_0, y_0, z_0; α_1, β_1, γ_1 sind gegebene Grössen. Man hat also Gleichung (9.) zunächst zu lösen für $\nu = 1$, wodurch r_1 und dann nach (8.) x_1, y_1, z_1 gefunden werden. Nach Herleitung von α_2, β_2, γ_2 aus (6.) für $\nu = 1$, kann man nun (9.) lösen für $\nu = 2$, wodurch man r_2 und dann nach (8.) x_2, y_2, z_2 erhält. Fährt man so fort, bis x_{s-1}, y_{s-1}, z_{s-1} gefunden sind, so kann man schliesslich nach Aufstellung von α_s, β_s, γ_s aus (6.) für $\nu = s-1$ (9.) lösen für $\nu = s$, wodurch r_s und dann nach (8.) x_s, y_s, z_s erhalten werden. Nach Herleitung von α_{s+1}, β_{s+1}, γ_{s+1} aus (6.) für $\nu = s$ und Einführung dieser Werthe und der für x_s, y_s, z_s gefundenen in (5.) für $\nu = s$ erhält man dann die Gleichungen der in das letzte Mittel n_{s+1} ausfahrenden Strahlen.

Wegen (8.) und der Bedeutung der darin enthaltenen Grössen ist r_ν die Länge der vom Punkte $(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, z_{\nu-1})$ bis zum Punkte (x_ν, y_ν, z_ν) gezogenen geraden Linie, also *die Länge des im Mittel n_ν liegenden Theiles eines der das Mittel n_ν durchziehenden Strahlen.*

Auf jedem der das Mittel n_{s+1} durchlaufenden Strahlen nehme man

jetzt *einen willkürlichen Punkt* (x, y, z) an. Dann ist nach (5.) für $\nu = s$:

$$(10.)\qquad \frac{x-x_s}{\alpha_{s+1}} = \frac{y-y_s}{\beta_{s+1}} = \frac{z-z_s}{\gamma_{s+1}} = r_{s+1}.$$

r_{s+1} ist wieder die Länge des Strahles im Mittel n_{s+1} vom Punkte (x_s, y_s, z_s) bis zum Punkte (x, y, z).

Wie oben gezeigt, werden $x_s, y_s, z_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}, \gamma_{s+1}$ bestimmte Functionen der allein veränderlichen Grössen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Versteht man auch *unter* r_{s+1} *eine noch zu bestimmende Function dieser Grössen,* so werden, weil nach (10.):

$$(11.)\qquad x = x_s + \alpha_{s+1} r_{s+1};\quad y = y_s + \beta_{s+1} r_{s+1};\quad z = z_s + \gamma_{s+1} r_{s+1}$$

ist, auch x, y, z Functionen von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, zwischen welchen Grössen die zweite Gleichung (2.) besteht. Denkt man also umgekehrt $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ aus (11.) als Functionen von x, y, z bestimmt und führt diese Werthe in die zweite Gleichung (2.) ein, so entsteht eine Gleichung von der Form:

$$(12.)\qquad \Phi(x, y, z) = 0.$$

Oder die Punkte (x, y, z) erfüllen eine Fläche, die je nach der Art, wie man r_{s+1} als von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ abhängig annimmt, eine andere sein wird.

Es entsteht nun hier eine grosse Zahl denkbarer Aufgaben, die sich alle zusammenfassen lassen in die:

r_{s+1} *als eine solche Function der Grössen* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *zu bestimmen, dass die Fläche* (12.) *einer willkürlich vorgeschriebenen Bedingung genügt.*

Die Möglichkeit einer solchen Aufgabe ist erst durch die nähere Untersuchung derselben festzustellen. Auch soll jetzt hier nur *die* eine weiter behandelt werden: r_{s+1} *so zu bestimmen, dass jeder Strahl* (10.) *die Normale der Fläche* (12.) *im Punkte* (x, y, z) *darstellt.*

Die Normale der Fläche (12.) im Punkte (x, y, z) hat die Gleichungen:

$$(13.)\qquad \frac{\xi - x}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}},$$

wo ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten eines Punktes der Normale bedeuten.

Der gestellten Forderung nach sollen die Gleichungen der Normale (13.) identisch werden mit denen des Strahles (10.). Hierzu ist nothwendige und hinreichende Bedingung:

$$(14.)\qquad \alpha_{s+1} : \beta_{s+1} : \gamma_{s+1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Mit der aus (12.) folgenden Gleichung:

$$(15.)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = 0,$$

erhält man aus (14.)

$$(16.)\qquad \alpha_{s+1}dx+\beta_{s+1}dy+\gamma_{s+1}dz = 0.$$

Es ist also r_{s+1} so zu bestimmen, dass der Gleichung (16.) genügt wird, und ist dies geschehen, so sind die Strahlen (10.) Normalen der gefundenen Fläche, weil das gleichzeitige Bestehen von (15.) und (16.) bei der Willkürlichkeit zweier der drei Grössen dx, dy, dz die Bedingung (14.) zur nothwendigen Folge hat.

Wegen (11.) und der zweiten Gleichung (5.) für $\nu = s$, wonach auch:

$$\alpha_{s+1}d\alpha_{s+1}+\beta_{s+1}d\beta_{s+1}+\gamma_{s+1}d\gamma_{s+1} = 0$$

ist, geht (16.) über in:

$$(17.)\qquad \alpha_{s+1}dx_s+\beta_{s+1}dy_s+\gamma_{s+1}dz_s+dr_{s+1} = 0.$$

Wegen (6.) und (1.) für $\nu = s$, wonach auch:

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_s}dx_s+\frac{\partial\varphi_s}{\partial y_s}dy_s+\frac{\partial\varphi_s}{\partial z_s}dz_s = 0$$

ist, wird aus (17.):

$$\varkappa_s(\alpha_s dx_s+\beta_s dy_s+\gamma_s dz_s)+dr_{s+1} = 0$$

oder wegen des in (7.) gegebenen Werthes von $\varkappa_s$:

$$(18.)\qquad n_s(\alpha_s dx_s+\beta_s dy_s+\gamma_s dz_s)+n_{s+1}dr_{s+1} = 0.$$

Nun ist nach (8.):

$$(19.)\qquad \begin{cases} x_{\nu+1} = x_\nu+\alpha_{\nu+1}r_{\nu+1};\quad y_{\nu+1} = y_\nu+\beta_{\nu+1}r_{\nu+1};\quad z_{\nu+1} = z_\nu+\gamma_{\nu+1}r_{\nu+1}, \\ \text{für alle } \nu \text{ von } 0 \text{ bis } s-1. \end{cases}$$

Demnach wird der Ausdruck:

$$(20.)\qquad \alpha_{\nu+1}dx_{\nu+1}+\beta_{\nu+1}dy_{\nu+1}+\gamma_{\nu+1}dz_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1}dx_\nu+\beta_{\nu+1}dy_\nu+\gamma_{\nu+1}dz_\nu+dr_{\nu+1},$$

wegen der zweiten Gleichung (5.). Es ist aber wegen (6.) und (1.):

$$\alpha_{\nu+1}dx_\nu+\beta_{\nu+1}dy_\nu+\gamma_{\nu+1}dz_\nu = \varkappa_\nu(\alpha_\nu dx_\nu+\beta_\nu dy_\nu+\gamma_\nu dz_\nu).$$

Führt man dies in (20.) ein und benutzt noch den Werth von $\varkappa_\nu$ aus (7.), so folgt:

$$(21.)\qquad n_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}dx_{\nu+1}+\beta_{\nu+1}dy_{\nu+1}+\gamma_{\nu+1}dz_{\nu+1}) = n_\nu(\alpha_\nu dx_\nu+\beta_\nu dy_\nu+\gamma_\nu dz_\nu)+n_{\nu+1}dr_{\nu+1},$$

für alle ν von 1 bis $s-1$

Schreibt man nun die Gleichung (21.) auf für $\nu = s-1$, darunter die aus (21.) für $\nu = s-2$ folgende, darunter die für $\nu = s-3$ folgende und so fort bis zu der letzten aus (21.) für $\nu = 1$ folgenden, so entsteht durch Addition aller dieser Gleichungen:

$$(22.)\quad \begin{cases} n_s(\alpha_s dx_s + \beta_s dy_s + \gamma_s dz_s) = n_s dr_s + n_{s-1} dr_{s-1} + \cdots \\ \qquad \cdots + n_2 dr_2 + n_1(\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1). \end{cases}$$

Wendet man nun (20.) für $\nu = 0$ an, so folgt, weil x_0, y_0, z_0 constante Grössen sind:

$$(23.)\quad \alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1 = dr_1.$$

Setzt man nun (23.) in (22.) und dies in (18.) ein, so folgt:

$$(24.)\quad n_1 dr_1 + n_2 dr_2 + \cdots + n_{s-1} dr_{s-1} + n_s dr_s + n_{s+1} dr_{s+1} = 0$$

oder durch Integration:

$$(25.)\quad n_1 r_1 + n_2 r_2 + \cdots + n_s r_s + n_{s+1} r_{s+1} = C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet.

Versteht man also unter r_{s+1} die durch (25.) *jetzt bestimmte Function der Grössen α_1, β_1, γ_1, zwischen denen die zweite Gleichung* (2.) *besteht, so sind die durch* (11.) *gegebenen Grössen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte der Fläche* (12.) *oder derjenigen Fläche, zu welcher sämmtliche im letzten Mittel verlaufenden Strahlen* (10.) *normal sind.*

Hierdurch ist also nicht nur die Existenz dieser Fläche nachgewiesen, sondern auch eine Methode gegeben, ihre Gleichung in jedem Falle aufzustellen.

Diese Gleichung ist hier zunächst dadurch gefunden, dass die Coordinaten eines Punktes der Fläche Functionen dreier Parameter α_1, β_1, γ_1 werden, zwischen denen die Gleichung

$$(26.)\quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

besteht. Ersetzt man α_1, β_1, γ_1 durch solche Functionen zweier willkürlichen Parameter, welche (26.) identisch erfüllen, so ist die Gleichung der in Rede stehenden Flächen auch dadurch darzustellen, dass die Coordinaten ihrer Punkte Functionen zweier willkürlichen Parameter werden. Denkt man endlich α_1, β_1, γ_1 als Functionen von x, y, z aus (11.) ausgedrückt, und sei:

$$\alpha_1 = \varphi(x, y, z); \quad \beta_1 = \chi(x, y, z); \quad \gamma_1 = \psi(x, y, z),$$

so wird die Gleichung der Fläche nach (26.):

$$(27.)\qquad \varphi^2+\chi^2+\psi^2 = 1.$$

Die Gleichungen der in Rede stehenden Flächen können also auch die in (27.) dargestellte ausgezeichnete Form erhalten, wenn die wirkliche Herleitung von φ, χ, ψ algebraisch möglich ist.

Nach Herrn ***Kummer***, dieses Journal Bd. 57 pag. 189, ist die Existenz der oben untersuchten Flächen zuerst von ***Malus*** bewiesen worden. Weitere mir bekannte Nachweise derselben Thatsache findet man in ***Bertrand***, Calcul différentiel, Paris 1864 pag. 685—87. Ferner in ***Helmholtz***, Handbuch der physiologischen Optik, Leipzig 1867 pag. 249 flg. Am letzteren Orte findet sich auch die hier mit (25.) bezeichnete Gleichung. Aus den von Herrn ***Helmholtz*** angegebenen Gründen (l. c. pag. 238, pag. 243) würde man die hier untersuchten Flächen mit dem Namen ***Wellenflächen*** bezeichnen, wenn nicht eine Verwechselung mit der ***Fresnel***schen Wellenfläche zu befürchten wäre.

Wegen der willkürlichen Constanten C giebt es für ein bestimmtes System von Strahlen (10.) unzählig viele der hier betrachteten Flächen, die sich jedoch nur in dem Werthe von C unterscheiden. Hat für zwei beliebige dieser Flächen die Constante die Werthe A und B, so unterscheiden sich wegen (25.) die zugehörigen r_{s+1} um den absoluten Werth der Grösse $(A-B):n_{s+1}$. Hieraus folgt, dass man aus einer der Flächen alle übrigen erhält, wenn man sämmtliche Normalen vom Punkte (x, y, z) aus um dieselbe willkürliche Grösse vermehrt oder vermindert, oder ***alle diese Flächen sind parallel.*** (***Bertrand*** l. c. pag. 687.)

Berlin, den 6. April 1877.

On the 16-nodal quartic surface.

(By Professor *A. Cayley* at Cambridge.)

Prof. *Borchardt* in the Memoir „Ueber die Darstellung u. s. w." this Journal t. 83 pp. 234—243, shows that the coordinates x, y, z, w may be taken as proportional to four of the double ϑ-functions, and that the equation of the surface is then *Göpel's* relation of the fourth order between these four functions: and he remarks at the end of the memoir that it thus appears that the coordinates x, y, z, w of a point on the surface can be expressed as proportional to algebraic functions, involving square roots only, of two arbitrary parameters ξ, ξ'.

It is interesting to develope the theory from this point of view: Writing as in my paper „Further investigations on the double ϑ-functions" pp. 220—233.

$$\begin{aligned} [a] &= aa', \\ [b] &= bb', \\ [c] &= cc', \\ [d] &= dd', \\ [e] &= ee', \\ [f] &= ff', \\ [ab] &= \frac{1}{(\xi-\xi')^2}(\sqrt{abfc'd'e'}-\sqrt{a'b'f'cde})^2, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

where on the right hand sides $a, b, \ldots a', \ldots$ denote $a-\xi$, $b-\xi$, $\ldots$ $a-\xi'$, $\ldots$ (ξ, ξ' being here written in place of the x, x' of my paper) then the sixteen functions are proportional to constant multiples of the square-roots of these expressions; viz. the correspondence is

$$\begin{array}{cccccc} S_2 = \vartheta_{13}, & S_1 = \vartheta_{24}, & R_1 = \vartheta_3, & R = \vartheta_{04}, & Q = \vartheta_1, & Q_2 = \vartheta_{02}, \\ i\sqrt[4]{a}\sqrt{[a]}, & i\sqrt[4]{b}\sqrt{[b]}, & i\sqrt[4]{c}\sqrt{[c]}, & i\sqrt[4]{d}\sqrt{[d]}, & i\sqrt[4]{e}\sqrt{[e]}, & i\sqrt[4]{f}\sqrt{[f]}; \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} Q_1 = \vartheta_2, & P_1 = \vartheta_{34}, & P = \vartheta_{01}, & S = -\vartheta_{14}, & P_2 = \vartheta_{12}, & P_3 = \vartheta_5, \\ \sqrt[4]{ab}\sqrt{[ab]}, & \sqrt[4]{ac}\sqrt{[ac]}, & \sqrt[4]{ad}\sqrt{[ad]}, & \sqrt[4]{ae}\sqrt{[ae]}, & \sqrt[4]{bc}\sqrt{[bc]}, & \sqrt[4]{bd}\sqrt{[bd]}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} S_3 = \vartheta_{23}, & Q_3 = \vartheta_0, & R_3 = \vartheta_4, & R_2 = \vartheta_{03}, \\ \sqrt[4]{be}\sqrt{[be]}, & \sqrt[4]{cd}\sqrt{[cd]}, & \sqrt[4]{ce}\sqrt{[ce]}, & \sqrt[4]{de}\sqrt{[de]}, \end{array}$$

where under the signs $\sqrt[4]{\ }$ a signifies $bcdef$, that is $bc.bd.be.bf.cd.ce.cf.de.df.ef$, and ab signifies $abf.cde$, that is $ab.af.bf.cd.ce.de$, in which expressions bc, bd, ... ab, af, ... signify the differences $b-c$, $b-d$, ... $a-b$, $a-f$, ... But in what follows we are not concerned with the values of these constant multipliers.

Prof. *Borchardt*'s coordinates x, y, z, w are

$$x = \vartheta_0, \ = P; \quad y = \vartheta_{23}, \ = S_3; \quad z = \vartheta_{14} = -S; \quad w = \vartheta_5, \ = P_3;$$

viz. P, S, P_3, S_3 are a set connected by *Göpel*'s relation of the fourth order — and this relation can be found (according to *Göpel*'s method) by showing that Q^2 and R^2 are each of them a linear function of the four squares P^2, P_3^2, S^2, S_3^2, and further that QR is a linear function of PS and P_3S_3; for then, squaring the expression of QR, and for Q^2 and R^2 substituting their values, we have the required relation of the fourth order between P, S, P_3, S_3.

Now we have P, S, P_3, S_3, Q, R = constant multiples of $\sqrt{[ac]}$, $\sqrt{[ab]}$, $\sqrt{[cd]}$, $\sqrt{[bd]}$, $\sqrt{[b]}$, $\sqrt{[c]}$ respectively: and it of course follows that we must have the like relations between these six quantities; viz. we must have $[b]$, $[c]$ each of them a linear function of $[ac]$, $[ab]$, $[cd]$, $[bd]$; and moreover $\sqrt{[b]}\sqrt{[c]}$ a linear function of $\sqrt{[ac]}\sqrt{[ab]}$ and $\sqrt{[bd]}\sqrt{[cd]}$.

As regards this last relation, starting from the formulae

$$\sqrt{[ac]} = \frac{1}{\xi-\xi'}\{\sqrt{acfb'd'e'} + \sqrt{a'c'f'bde}\},$$

$$\sqrt{[bd]} = \frac{1}{\xi-\xi'}\{\sqrt{bdfa'c'e'} + \sqrt{b'd'f'ace}\},$$

$$\sqrt{[ab]} = \frac{1}{\xi-\xi'}\{\sqrt{abfc'd'e'} + \sqrt{a'b'f'cde}\},$$

$$\sqrt{[cd]} = \frac{1}{\xi-\xi'}\{\sqrt{cdfa'b'e'} + \sqrt{c'd'f'abe}\},$$

we have at once

$$\sqrt{[ac]}\sqrt{[ab]} = \frac{1}{(\xi-\xi')^2}\{(afd'e' + a'f'de)\sqrt{bcb'c'} + (bc'+b'c)\sqrt{adea'd'e'}\},$$

$$\sqrt{[bd]}\sqrt{[cd]} = \frac{1}{(\xi-\xi')^2}\{(dfa'e' + d'f'ae)\sqrt{bcb'c'} + (bc'+b'c)\sqrt{adea'd'e'}\};$$

the difference of these two expressions is

$$= \frac{1}{(\xi-\xi')^2}(ad'-a'd)(fe'-f'e)\sqrt{bcb'c'},$$

where substituting for $a, d, e, f, a', \dots$ their values $a-\xi,\ d-\xi,\ e-\xi,$ $f-\xi,\ a-\xi',\ \dots$ we have $ad'-a'd=(a-d)(\xi-\xi')$, $fe'-f'e=(f-e)(\xi-\xi')$; also $\sqrt{bc}\sqrt{b'c'}=\sqrt{[b]}\sqrt{[c]}$: and we have thus the required relation

$$\sqrt{[ac]}\sqrt{[ab]}-\sqrt{[bd]}\sqrt{[cd]} = -(a-d)(e-f)\sqrt{[b]}\sqrt{[c]}.$$

As regards the first mentioned relation, if for greater generality, θ being arbitrary, we write $[\theta]=\theta\theta'$ (that is $=(\theta-\xi)(\theta-\xi')$) then it is easy to see that there exists a relation of the form

$$[\theta] = A[ab]+B[ac]+C[bd]+D[cd],$$

where $A+B+C+D=0$: in fact the righthand side is thus a linear function of the differences $[ab]-[ac]$, $[ab]-[bd]$, $[ab]-[cd]$: and each of these (the irrational terms disappearing and the rational terms dividing by $(\xi-\xi')^2$) is a mere linear function of $1,\ \xi+\xi',\ \xi\xi'$; whence there is a relation of the form in question. I found without much difficulty the actual formula; viz. this is

$$(a-d)(b-c)(e-f)\begin{vmatrix}1, & e+f, & ef & [\theta]\\ 1, & b+c, & bc & \\ 1, & a+d, & ad & \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1, & e, & f, & ef\\ 1, & b, & c, & bc\\ 1, & d, & a, & ad\\ 1, & \theta, & \theta, & \theta^2\end{vmatrix}[ac]-\begin{vmatrix}1, & e, & f, & ef\\ 1, & c, & b, & bc\\ 1, & d, & a, & ad\\ 1, & \theta, & \theta, & \theta^2\end{vmatrix}[ab]-\begin{vmatrix}1, & e, & f, & ef\\ 1, & b, & c, & bc\\ 1, & a, & d, & ad\\ 1, & \theta, & \theta, & \theta^2\end{vmatrix}[cd]+\begin{vmatrix}1, & e, & f, & ef\\ 1, & c, & b, & bc\\ 1, & a, & d, & ad\\ 1, & \theta, & \theta, & \theta^2\end{vmatrix}[bd],$$

where observe that on the right hand side the last three determinants are obtained from the first one by interchanging b, c or a, d, or b, c and a, d simultaneously, a single interchange giving the sign $-$, but for two interchanges the sign remaining $+$.

Writing successively $\theta=b$ and $\theta=c$, we obtain

$$(a-d)(b-c)(e-f)\begin{vmatrix}1, & e+f, & ef & [b]\\ 1, & b+c, & bc & \\ 1, & a+d, & ad & \end{vmatrix}$$

$$= [illegible]\,[ac]-(a-b)(b-f)(d-e)[ab]+(a-b)(b-e)(d-f)[cd]$$
$$-(a-e)(b-d)(b-f)[bd],$$

$$(a-d)(e-f)\begin{vmatrix} 1, & e+f, & ef \\ 1, & b+c, & bc \\ 1, & a+d, & ad \end{vmatrix}[c]$$

$$= -(a-c)(c-f)(d-e)[ac]+(a-f)(c-d)(c-e)[ab]-(a-e)(c-d)(c-f)[cd] \\ +(a-c)(c-e)(d-f)[bd],$$

which values of $[b]$, $[c]$, combined with the foregoing equation

$$(a-d)(e-f)\sqrt{[b]}\sqrt{[c]} = -\sqrt{[ac]}\sqrt{[ab]}+\sqrt{[cd]}\sqrt{[bd]},$$

give the required quartic equation between $\sqrt{[ac]}$, $\sqrt{[ab]}$, $\sqrt{[cd]}$, $\sqrt{[bd]}$.

Cambridge 2[nd] August 1877.

Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

(Von Herrn *G. Cantor* in Halle.)

Wenn zwei wohldefinirte Mannigfaltigkeiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (was, wenn es auf eine Art möglich ist, immer auch noch auf viele andere Weisen geschehen kann), so möge für das Folgende die Ausdrucksweise gestattet sein, dass diese Mannigfaltigkeiten *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch, dass sie *äquivalent* sind. Unter einem *Bestandtheil* einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir jede andere Mannigfaltigkeit M', deren Elemente zugleich Elemente von M sind. Sind die beiden Mannigfaltigkeiten M und N nicht von gleicher Mächtigkeit, so wird entweder M mit einem Bestandtheile von N oder es wird N mit einem Bestandtheile von M gleiche Mächtigkeit haben; im ersteren Falle nennen wir die Mächtigkeit von M kleiner, im zweiten Falle nennen wir sie grösser als die Mächtigkeit von N.

Wenn die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten *endliche,* d. h. aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehende sind, so entspricht, wie leicht zu sehen, der Begriff der Mächtigkeit dem der *Anzahl* und folglich dem der *ganzen positiven Zahl,* da nämlich zweien solchen Mannigfaltigkeiten dann und nur dann gleiche Mächtigkeit zukommt, wenn die Anzahl ihrer Elemente die gleiche ist. Ein Bestandtheil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieses Verhältniss hört gänzlich auf bei den *unendlichen,* d. i. aus einer unendlichen Anzahl von Elementen bestehenden Mannigfaltigkeiten. Aus dem Umstande allein, dass eine unendliche Mannigfaltigkeit M ein Bestandtheil einer andern N ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, darf keineswegs geschlossen werden, dass ihre Mächtigkeit kleiner ist als die von N; dieser Schluss ist nur dann berechtigt, wenn man weiss, dass die Mächtigkeit von M nicht gleich ist derjenigen von N; ebensowenig darf der Umstand, dass N ein Bestandtheil von M ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, als ausreichend dafür betrachtet werden, dass die Mächtigkeit von M grösser sei, als die von N.

Um an ein einfaches Beispiel zu erinnern, sei M die Reihe der posi-

tiven, ganzen Zahlen ν, N die Reihe der positiven geraden ganzen Zahlen 2ν; hier ist N ein Bestandtheil von M und nichtsdestoweniger sind M und N von gleicher Mächtigkeit.

Die Reihe der positiven, ganzen Zahlen ν bietet, wie sich leicht zeigen lässt, die kleinste von allen Mächtigkeiten dar, welche bei unendlichen Mannigfaltigkeiten vorkommen. Nichtsdestoweniger ist die Klasse der Mannigfaltigkeiten, welche diese kleinste Mächtigkeit haben, eine ausserordentlich reiche und ausgedehnte. Zu dieser Klasse gehören beispielsweise alle diejenigen Mannigfaltigkeiten, welche Herr *R. Dedekind* in seinen werthvollen und schönen Untersuchungen über die algebraischen Zahlen *„endliche Körper"* nennt (Man vergl. *Dirichlets* Vorlesungen über Zahlentheorie, zweite Auflage, Braunschweig 1871, S. 425 f.); ferner sind hier diejenigen, zuerst von mir in Betracht gezogenen, Mannigfaltigkeiten anzuführen, welche ich *„Punktmengen der ν^{ten} Art"* genannt habe (Man vergl. Mathematische Annalen von *Clebsch* und *Neumann*, Bd. V. S. 129). Jede als einfach unendliche Reihe, mit dem allgemeinen Gliede a_ν, auftretende Mannigfaltigkeit gehört offenbar hierher; aber auch die Doppelreihen und allgemein die n-fachen Reihen mit dem allgemeinen Gliede $a_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n}$ (wo ν_1, ν_2, ... ν_n unabhängig von einander alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen) sind von dieser Klasse. Bei einer früheren Gelegenheit wurde sogar bewiesen, dass der Inbegriff (ω) aller reellen (und man könnte auch hinzufügen: aller complexen) algebraischen Zahlen in Form einer Reihe, mit dem allgemeinen Gliede ω_ν, gedacht werden kann, was nichts anderes heisst, als, dass die Mannigfaltigkeit (ω) sowohl, wie auch jeder unendliche Bestandtheil derselben die Mächtigkeit der ganzen Zahlenreihe haben.

In Bezug auf die Mannigfaltigkeiten dieser Klasse gelten die folgenden, leicht zu beweisenden Sätze:

„Ist M eine Mannigfaltigkeit von der Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe, so hat auch jeder unendliche Bestandtheil von M gleiche Mächtigkeit mit M."

„Ist M', M'', M''', ... eine endliche oder einfach unendliche Reihe von Mannigfaltigkeiten, von denen jede die Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe besitzt, so hat auch die Mannigfaltigkeit M, welche aus der Zusammenfassung von M', M'', M''', ... entsteht, dieselbe Mächtigkeit."

Im Folgenden sollen nun die sogenannten stetigen, n-fachen Mannigfaltigkeiten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit untersucht werden.

Die Forschungen, welche *Riemann* *) und *Helmholtz* **) und nach ihnen andere ***) über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, angestellt haben, gehen bekanntlich von dem Begriffe einer n-fach ausgedehnten, stetigen Mannigfaltigkeit aus und setzen das wesentliche Kennzeichen derselben in den Umstand, dass ihre Elemente von n von einander unabhängigen, reellen, stetigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen, so dass zu jedem Elemente der Mannigfaltigkeit ein zulässiges Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$, aber auch umgekehrt zu jedem zulässigen Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein gewisses Element der Mannigfaltigkeit gehört. Meist stillschweigend wird, wie aus dem Verlaufe jener Untersuchungen hervorgeht, ausserdem die *Voraussetzung* gemacht, dass die zu Grunde gelegte *Correspondenz* der Elemente der Mannigfaltigkeit und des Werthsystemes $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine stetige sei, so dass jeder unendlich kleinen Aenderung des Werthsystemes $x_1, x_2 \ldots x_n$ eine unendlich kleine Aenderung des entsprechenden Elementes und umgekehrt jeder unendlich kleinen Aenderung des Elementes eine ebensolche Werthänderung seiner Coordinaten entspricht. Ob diese Voraussetzung als ausreichend zu betrachten, oder ob sie durch noch speciellere Bedingungen zu ergänzen sei, damit die beabsichtigte Begriffsbildung der n-fachen, stetigen Mannigfaltigkeit als eine gegen jeden Widerspruch gesicherte, in sich gefestigte betrachtet werden kann †), — möge zunächst dahingestellt bleiben; hier soll allein gezeigt werden, dass wenn sie fallen gelassen wird, d. i. wenn hinsichtlich der Correspondenz zwischen der Mannigfaltigkeit und ihren Coordinaten keinerlei Beschränkung gemacht wird, alsdann jenes von den Autoren als wesentlich bezeichnete Merkmal (wonach eine n-fache stetige Mannigfaltigkeit eine solche ist, deren Elemente aus n von einander unabhängigen reellen, stetigen Coordinaten sich bestimmen lassen) durchaus hinfällig wird.

Wie unsere Untersuchung zeigen wird, ist es sogar möglich, die

---

*) Man vergl. *Riemanns* gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1876. S. 254 f.

**) Man vergl. *Helmholtz*: „Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie". Heidelberger Jahrbücher 1868, No. 46 und 47 und: „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Göttinger Nachrichten 1868, No. 9; desselben Verfassers populäre Vorträge, Heft III, Braunschweig 1876, S. 21 f.

***) Man vergl. *J. Rosanes*, über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. Breslau, 1871, S. 13. — *O. Liebmann*, zur Analysis der Wirklichkeit. Strassburg, 1876, S. 58. — *B. Erdmann*, die Axiome der Geometrie. Leipzig, 1877, S. 45.

†) Die Beantwortung dieser Frage, auf welche wir bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werden, scheint mir keinen nennenswerthen Schwierigkeiten zu begegnen.

Elemente einer n-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit durch eine einzige, reelle stetige Coordinate t eindeutig und vollständig zu bestimmen. Daraus folgt alsdann, dass wenn für die Art der Correspondenz keine Voraussetzungen gestellt werden, die Anzahl der unabhängigen, stetigen, reellen Coordinaten, welche zur eindeutigen und vollständigen Bestimmung der Elemente einer n-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit zu benutzen sind, auf jede vorgegebene Zahl gebracht werden kann und also *nicht* als unveränderliches Merkmal einer gegebenen Mannigfaltigkeit anzusehen ist. Indem ich mir die Frage vorlegte, ob eine stetige Mannigfaltigkeit von n Dimensionen sich eindeutig und vollständig einer stetigen Mannigfaltigkeit von nur einer Dimension zuordnen lässt, so dass jedem Elemente der einen von ihnen ein und *nur* ein Element der andern entspricht, fand es sich, dass diese Frage bejaht werden muss.

Es lässt sich demnach eine stetige Fläche eindeutig und vollständig auf eine stetige Linie beziehen, das Gleiche gilt von stetigen Körpern und von stetigen Gebilden mit beliebig vielen Dimensionen.

Unter Anwendung der oben eingeführten Ausdrucksweise können wir daher sagen, dass die Mächtigkeit eines beliebigen stetigen, n-fach ausgedehnten Gebildes *gleich* ist der Mächtigkeit einer einfach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit, wie beispielsweise einer begränzten, stetigen geraden Strecke.

§. 1.

Da zwei stetige Gebilde von *gleicher* Dimensionenzahl sich mittelst analytischer Functionen auf einander eindeutig und vollständig beziehen lassen, so kommt bei dem von uns verfolgten Zwecke (nämlich die Möglichkeit eindeutiger und vollständiger Zuordnungen von stetigen Gebilden mit verschiedener Dimensionenzahl nachzuweisen), wie man leicht einsieht, *Alles* auf den Beweis des folgenden Satzes an:

(A.) „Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ n von einander unabhängige, veränderliche reelle Grössen, von denen jede alle Werthe, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, und ist t eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum $(0 \leqq t \leqq 1)$, so ist es möglich, die eine Grösse t dem Systeme der n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so zuzuordnen, dass zu jedem bestimmten Werthe von t ein bestimmtes Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ und umgekehrt zu jedem bestimmten Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein gewisser Werth von t gehört."

Als Folge dieses Satzes stellt sich alsdann der von uns in Aussicht genommene andere dar:

(B.) „Eine nach n Dimensionen ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit lässt sich eindeutig und vollständig einer stetigen Mannigfaltigkeit von einer Dimension zuordnen; zwei stetige Mannigfaltigkeiten, die eine von n, die andere von m Dimensionen, wo $n \gtreqless m$, haben gleiche Mächtigkeit; die Elemente einer nach n Dimensionen ausgedehnten, stetigen Mannigfaltigkeit lassen sich durch eine einzige stetige, reelle Coordinate t eindeutig bestimmen, sie lassen sich aber auch durch ein System von m stetigen Coordinaten $t_1, t_2, \ldots t_m$ eindeutig und vollständig bestimmen."

§. 2.

Zum Beweise von (A.) gehen wir von dem bekannten Satze aus, dass jede *irrationale* Zahl $e \gtrless {0 \atop 1}$ sich auf eine völlig bestimmte Weise in der Form eines unendlichen Kettenbruches:

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \cdots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$$

darstellen lässt, wo die α_ν positive, ganze rationale Zahlen sind.

Zu jeder irrationalen Zahl $e \gtrless {0 \atop 1}$ gehört eine bestimmte unendliche Reihe von positiven ganzen Zahlen α_ν und umgekehrt bestimmt eine jede solche Reihe eine gewisse irrationale Zahl $e \gtrless {0 \atop 1}$.

Sind nun $e_1, e_2, \ldots e_n$ n von einander unabhängige veränderliche Grössen, von denen jede alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles $(0\ldots1)$, und einen jeden von diesen nur einmal annehmen kann, so setze man:

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_\mu &= (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,\nu}, \ldots); \end{aligned}$$

diese n irrationalen Zahlen bestimmen eindeutig eine $\overline{n+1}^{\text{te}}$ irrationale Zahl $d \gtrless {0 \atop 1}$:

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots),$$

wenn man zwischen den Zahlen α und β folgende Beziehung festsetzt:

$$(1.)\quad \beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \quad \begin{cases} \mu = 1, 2, \dots n, \\ \nu = 1, 2, \dots \infty. \end{cases}$$

Aber auch umgekehrt: wenn man von einer irrationalen Zahl $d \gtrless {0 \atop 1}$ ausgeht, so bestimmt dieselbe die Reihe der β_ν und vermöge (1.) auch die Reihen der $\alpha_{\mu,\nu}$, d. h. d bestimmt eindeutig das System der n irrationalen Zahlen $e_1, e_2, \dots e_n$. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich zunächst der folgende Satz:

(C.) „Sind $e_1, e_2, \dots e_n$ n von einander unabhängige veränderliche Grössen, von denen eine jede alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles $(0\dots1)$ annehmen kann, und ist d eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum, wie jene, so ist es möglich die eine Grösse d und das System der n Grössen $e_1, e_2, \dots e_n$ eindeutig und vollständig einander zuzuordnen."

§. 3.

Nachdem im vorigen Paragraphen der Satz (C.) bewiesen worden ist, muss es nun unsere Sache sein, den Beweis des folgenden Satzes zu führen:

(D.) „Eine veränderliche Grösse e, welche alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles $(0\dots1)$ annehmen kann, lässt sich eindeutig einer Veränderlichen x zuordnen, welche alle reellen, d. h. rationalen und irrationalen Werthe, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, erhält, so dass zu jedem irrationalen Werthe von $e \gtrless {0 \atop 1}$ ein und nur ein reeller Werth von $x \begin{smallmatrix}\geqq 0 \\ \leqq 1\end{smallmatrix}$ und umgekehrt zu jedem reellen Werthe von x ein gewisser irrationaler Werth von e gehört."

Denn ist einmal dieser Satz (D.) bewiesen, so denke man sich ***nach ihm*** den im §. 2 mit $e_1, e_2, \dots e_n$ und d bezeichneten $n+1$ veränderlichen Grössen entsprechend die anderen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ und t eindeutig und vollständig zugeordnet, wo jede dieser Veränderlichen ohne Beschränkung jeden reellen Werth, der $\geqq 0$ und $\leqq 1$, anzunehmen hat. Da zwischen der Veränderlichen d und dem System der n Veränderlichen $e_1, e_2, \dots e_n$ im §. 2 eine eindeutige und vollständige Correspondenz hergestellt ist, so erhält man auf diese Weise eine eindeutige und vollständige

Zuordnung der einen stetigen Veränderlichen t und des Systemes von n stetigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, womit die Richtigkeit des Satzes (A.) nachgewiesen sein wird. —

Wir werden uns also im Folgenden nur noch mit dem Beweise des Satzes (D.) zu beschäftigen haben; dabei möge eine einfache Symbolik, welche wir zunächst beschreiben wollen, Kürze halber, zur Anwendung kommen.

Unter einer *linearen* Mannigfaltigkeit reeller Zahlen wollen wir jede wohldefinirte Mannigfaltigkeit reeller, von einander verschiedener, d. i. ungleicher, Zahlen verstehen, so dass eine und dieselbe Zahl in einer linearen Mannigfaltigkeit nicht öfter, als einmal als Element vorkommt.

Die reellen Veränderlichen, welche im Laufe dieser Untersuchung vorkommen, sind alle von der Art, dass der Spielraum einer jeden von ihnen, d. h. die Mannigfaltigkeit der Werthe, welche sie annehmen kann, eine gegebene lineare Mannigfaltigkeit ist; wir wollen daher auch diese, überall stillschweigend gemachte, Voraussetzung in dem Folgenden nicht mehr besonders hervorheben. Von zweien solchen Veränderlichen a und b wollen wir sagen, dass sie *keinen Zusammenhang* haben, wenn kein Werth, welchen a annehmen kann, gleich ist einem Werthe von b; d. h. die beiden Mannigfaltigkeiten der Werthe, welche die Veränderlichen a, b annehmen können, haben keine gemeinschaftlichen Elemente, wenn gesagt werden soll, dass a und b *ohne Zusammenhang* sind *).

Hat man eine endliche oder unendliche Reihe $a', a'', a''', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ wohldefinirter Veränderlichen oder Constanten, die paarweise keinen Zusammenhang haben, so lässt sich eine Veränderliche a dadurch definiren, dass ihr Spielraum aus der Zusammenfassung der Spielräume von $a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ entsteht; umgekehrt lässt sich eine gegebene Veränderliche a nach den verschiedensten Modis in andere $a', a'', \ldots$ zerlegen, die paarweise keinen Zusammenhang haben; in diesen beiden Fällen drücken wir die Beziehung der Veränderlichen a zu den Veränderlichen $a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ durch folgende Formel aus:

$$a \equiv \{a', \quad a'', \quad \ldots, \quad a^{(\nu)}, \quad \ldots\}.$$

*) Zwei Mannigfaltigkeiten M und N haben entweder *keinen Zusammenhang*, wenn sie nämlich kein ihnen gemeinschaftlich angehöriges Element haben; oder sie hängen durch eine bestimmte dritte Mannigfaltigkeit P zusammen, nämlich durch die Mannigfaltigkeit der ihnen gemeinschaftlichen Elemente.



Zum Bestehen dieser Formel gehört also: 1) dass jeder Werth, welchen irgend eine der Veränderlichen $a^{(\nu)}$ annehmen kann, auch ein der Veränderlichen a zustehender Werth ist; 2) dass jeder Werth, welchen a erhalten kann, auch von einer und nur einer der Grössen $a^{(\nu)}$ angenommen wird. Um diese Formel zu erläutern, sei beispielsweise φ eine Veränderliche, welche alle rationalen Zahlwerthe, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, e eine Veränderliche, welche alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalls $(0 \dots 1)$, und endlich x eine Veränderliche, welche alle reellen, rationalen und irrationalen Zahlwerthe, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, so ist:

$$x \equiv \{\varphi, \quad e\}.$$

Sind a und b zwei veränderliche Grössen von der Art, dass es möglich ist, dieselben eindeutig und vollständig einander zuzuordnen, haben, mit anderen Worten, ihre beiden Spielräume gleiche Mächtigkeit, so wollen wir a und b einander *äquivalent* nennen und dies durch eine der beiden Formeln

$$a \sim b \quad \text{oder} \quad b \sim a$$

ausdrücken. Nach dieser Definition der Aequivalenz zweier veränderlichen Grössen folgt leicht, dass $a \sim a$; ferner dass, wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, alsdann auch immer $a \sim c$ ist.

In der folgenden Untersuchung wird der nachstehende Satz, dessen Beweis wir wegen seiner Einfachheit übergehen dürfen, an verschiedenen Stellen zur Anwendung kommen:

(E.) „Ist $a', a'', \dots, a^{(\nu)}, \dots$ eine endliche oder unendliche Reihe von Veränderlichen oder Constanten, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, $b', b'', \dots, b^{(\nu)}, \dots$ eine andere Reihe von derselben Beschaffenheit, entspricht jeder Veränderlichen $a^{(\nu)}$ der ersten Reihe eine bestimmte Veränderliche $b^{(\nu)}$ der zweiten und sind diese entsprechenden Veränderlichen stets einander äquivalent, d. h. ist: $a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$, so ist auch immer

$$a \sim b,$$

wenn

$$a \equiv \{a', \quad a'', \quad \dots, \quad a^{(\nu)}, \quad \dots\}$$

und

$$b \equiv \{b', \quad b'', \quad \dots, \quad b^{(\nu)}, \quad \dots\}.\text{“}$$

§. 4.

Unsere Untersuchung ist nun so weit geführt, dass es uns nur noch auf den Beweis des Satzes (D.) in §. 3 ankommt. Um zu diesem Ziele

zu gelangen, gehen wir davon aus, dass die sämmtlichen rationalen Zahlen, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, sich in der Form einer einfach unendlichen Reihe:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots, \quad \varphi_\nu, \quad \ldots$$

mit einem allgemeinen Gliede φ_ν schreiben lassen. Dies lässt sich am einfachsten wie folgt darthun: Ist $\frac{p}{q}$ die *irreductible* Form für eine rationale Zahl, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ ist, wo also p und q ganze, nicht negative Zahlen mit dem grössten gemeinschaftlichen Theiler 1 sind, so setze man $p+q=N$. Es gehört alsdann zu jeder Zahl $\frac{p}{q}$ ein bestimmter, ganzzahliger, positiver Werth von N, umgekehrt gehört zu einem solchen Werthe von N immer nur eine endliche Anzahl von Zahlen $\frac{p}{q}$. Werden nun die Zahlen $\frac{p}{q}$ in einer solchen Reihenfolge gedacht, dass die zu kleineren Werthen von N gehörigen denen vorangehen, für welche N einen grösseren Werth hat, dass ferner die Zahlen $\frac{p}{q}$, für welche N einen und denselben Werth hat, ihrer Grösse nach einander folgen, die grösseren auf die kleineren, so kommt jede der Zahlen $\frac{p}{q}$ an eine ganz bestimmte Stelle einer einfach unendlichen Reihe, deren allgemeines Glied mit φ_ν bezeichnet werde. Dieser Satz kann aber auch aus dem s. Z. von mir *) gebrachten geschlossen werden, wonach der Inbegriff (ω) aller reellen *algebraischen* Zahlen sich in der Form einer unendlichen Reihe:

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\nu, \quad \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede ω_ν auffassen lässt; diese Eigenschaft des Inbegriffes (ω) überträgt sich nämlich auf den Inbegriff aller rationalen Zahlen, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$, weil diese Mannigfaltigkeit ein *Theil* von jener ist. Sei nun e die im Satze (D.) vorkommende Veränderliche, welche alle reellen Zahlwerthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ anzunehmen hat, mit Ausnahme der Zahlen φ_ν.

Man nehme ferner im Intervalle $(0 \ldots 1)$ irgend eine unendliche Reihe irrationaler Zahlen ε_ν an, welche nur an die Bedingungen gebunden ist, dass allgemein $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ und dass $\lim \varepsilon_\nu = 1$ für $\nu = \infty$; beispielsweise sei $\varepsilon_\nu = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}$.

---

*) Man vergleiche: *G. Cantor*, „Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", dieses Journal, Bd. 77, S. 258 f.

Man bezeichne mit f eine Veränderliche, welche alle reellen Werthe des Intervalles $(0 \dots 1)$ annehmen kann, mit Ausnahme der Werthe ε_ν, mit g eine andere Veränderliche, welche alle reellen Werthe des Intervalles $(0 \dots 1)$ anzunehmen hat, mit Ausnahme der ε_ν und der φ_ν.

Wir behaupten, dass:

$$e \sim f.$$

In der That ist nach der Bezeichnungsweise des §. 3:

$$e \equiv \{g, \quad \varepsilon_\nu\},$$
$$f \equiv \{g, \quad \varphi_\nu\};$$

und da $g \sim g$; $\varepsilon_\nu \sim \varphi_\nu$, so schliessen wir nach Satz (E.) dass:

$$e \sim f.$$

Der zu beweisende Satz (D.) ist daher zurückgeführt auf folgenden Satz:

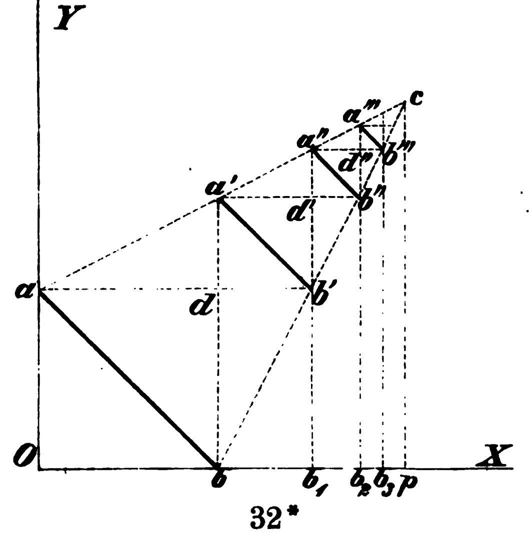
(F.) „Eine Veränderliche f, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \dots 1)$ annehmen kann, mit Ausnahme der Werthe einer gegebenen Reihe ε_ν, welche an die Bedingungen gebunden ist, dass $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ und dass $\lim \varepsilon_\nu = 1$ für $\nu = \infty$, lässt sich eindeutig und vollständig einer Veränderlichen x zuordnen, welche alle Werthe $\geqq 0$ und $\leqq 1$ anzunehmen hat; es ist, mit anderen Worten $f \sim x$."

§. 5.

Den Beweis von (F.) gründen wir auf die folgenden Sätze (G.), (H.), (J.):

(G.) „Ist y eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \dots 1)$ mit Ausnahme des einen 0 anzunehmen hat, x eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \dots 1)$, ohne Ausnahme erhält, so ist:

$$y \sim x."$$



Der Beweis dieses Satzes (G.) wird am einfachsten durch die Betrachtung nebenstehender Curve geführt, deren Abscissen von O aus die Grösse x,

deren Ordinaten die Grösse y repräsentiren. Diese Curve besteht aus den unendlich vielen einander parallelen, mit ins Unendliche wachsendem ν unendlich klein werdenden Strecken:

$$\overline{ab},\ \overline{a'b'},\ \ldots,\ \overline{a^{(\nu)}b^{(\nu)}},\ \ldots$$

und aus dem isolirten Punkte c, welchem sich jene Strecken asymptotisch nähern. Hierbei sind aber die Endpunkte $a, a', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ als *zur Curve gehörig*, dagegen die Endpunkte $b, b', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots$ als *von ihr ausgeschlossen* zu betrachten.

Die in der Figur vertretenen Längen sind:

$$\overline{Op} = \overline{pc} = 1; \quad \overline{Ob} = \overline{bp} = \overline{Oa} = \tfrac{1}{2};$$
$$\overline{a^{(\nu)}d^{(\nu)}} = \overline{d^{(\nu)}b^{(\nu)}} = \overline{b_{\nu-1}b_\nu} = \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

Man überzeugt sich, dass während die Abscisse x alle Werthe von 0 bis 1 annimmt, die Ordinate y alle diese Werthe mit *Ausschluss* des einen Werthes 0 erhält.

Nachdem auf diese Weise der Satz (G.) bewiesen ist, erhält man zunächst durch die Anwendung der Transformationsformeln:

$$y = \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}; \quad x = \frac{u-\alpha}{\beta-\alpha};$$

die folgende Verallgemeinerung von (G.):

(H.) „Eine Veränderliche z, welche alle Werthe eines Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$, wo $\alpha \gtreqless \beta$, mit Ausnahme des einen Endwerthes α annehmen kann, ist äquivalent einer Veränderlichen u, welche alle Werthe desselben Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ ohne Ausnahme erhält."

Von hier aus gelangen wir zunächst zu folgendem Satze:

(J.) „Ist w eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ mit Ausnahme der beiden Endwerthe α und β desselben anzunehmen hat, u dieselbe Veränderliche wie in (H.), so ist:

$$w \sim u."$$

In der That: es sei γ irgend ein Werth zwischen α und β; man führe hülfsweise vier neue Veränderliche w', w'', u'' und z ein.

z sei dieselbe Veränderliche wie in (H.), w' nehme alle Werthe des Intervalles $(\alpha \ldots \gamma)$ an, mit Ausnahme der beiden Endwerthe α und γ; w'' erhalte alle Werthe des Intervalles $(\gamma \ldots \beta)$ mit Ausnahme des einen End-

werthes β, u'' sei eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(\gamma \dots \beta)$ mit Einschluss der Endwerthe anzunehmen hat.

Es ist alsdann:

$$w \equiv \{w', \quad w''\},$$
$$z \equiv \{w', \quad u''\}.$$

In Folge des Satzes (H.) ist aber:

$$w'' \sim u'';$$

wir schliessen daher, dass:

$$w \sim z.$$

Nach Satz (H.) ist aber auch:

$$z \sim u;$$

folglich hat man auch: $w \sim u$, womit Satz (J.) bewiesen ist.

Nun können wir den Satz (F.) wie folgt beweisen:

Indem wir auf die Bedeutung der Veränderlichen f und x in der Ankündigung des Satzes (F.) verweisen, führen wir gewisse Hülfsveränderliche:

$$f', \quad f'', \quad \dots, \quad f^{(\nu)}, \quad \dots$$

und

$$x'', \quad x^{\text{IV}}, \quad \dots, \quad x^{(2\nu)}, \quad \dots$$

ein, und zwar seien:

f' eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \dots \varepsilon_1)$ mit Ausnahme des einen Endwerthes ε_1 erhält, $f^{(\nu)}$ für $\nu > 1$ eine Veränderliche, die alle Werthe des Intervalles $(\varepsilon_{\nu-1} \dots \varepsilon_\nu)$ mit Ausnahme der beiden Endwerthe $\varepsilon_{\nu-1}$ und ε_ν anzunehmen hat; $x^{(2\nu)}$ sei eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(\varepsilon_{2\nu-1} \dots \varepsilon_{2\nu})$ ohne Ausnahme erhält.

Fügt man zu den Veränderlichen $f', f'', \dots f^{(\nu)}, \dots$ noch die constante Zahl 1, so haben alle diese Grössen zusammengenommen denselben Spielraum wie f, d. h. man hat:

$$f \equiv \{f', \quad f'', \quad \dots, \quad f^{(\nu)}, \quad \dots, \quad 1\}.$$

Ebenso überzeugt man sich, dass:

$$x \equiv \{f', \quad x'', \quad f''', \quad x^{\text{IV}}, \quad \dots, \quad f^{(2\nu-1)}, \quad x^{(2\nu)}, \quad \dots, \quad 1\}.$$

Dem Satze (J.) zufolge ist aber:

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)};$$

ferner ist:

$$f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}; \quad 1 \sim 1;$$

daher ist, wegen des Satzes (E.) §. 3:

$$f \sim x,$$

w. z. b. w.

§. 6.

Ich will nun für den Satz (D.) noch einen kürzeren Beweis geben; wenn ich mich auf diesen allein nicht beschränkt habe, so geschah es aus dem Grunde, weil die Hülfssätze (F.), (G.), (H.), (J.), welche bei der complicirteren Beweisführung gebraucht wurden, an sich von Interesse sind.

Unter x verstehen wir, wie früher, eine Veränderliche, welche alle reellen Werthe des Intervalles $(0\ldots1)$, mit Einschluss der Endwerthe, anzunehmen hat, e sei eine Veränderliche, welche nur die irrationalen Werthe des Intervalles $(0\ldots1)$ erhält; und zu beweisen ist, dass $x \sim e$.

Die rationalen Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq 1$ denken wir uns, wie in §. 4, in Reihenform mit dem allgemeinen Gliede φ_ν, wo ν die Zahlenreihe 1, 2, 3, ... zu durchlaufen hat. Ferner nehmen wir eine beliebige unendliche Reihe von lauter irrationalen, von einander verschiedenen Zahlen des Intervalles $(0\ldots1)$ an; das allgemeine Glied dieser Reihe sei η_ν. $\left(\text{z. B. } \eta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}\right)$.

Unter h verstehe man eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(0\ldots1)$ mit Ausnahme der φ_ν sowohl, wie der η_ν anzunehmen hat.

Nach der in §. 3 eingeführten Symbolik ist alsdann:

$$(1.) \qquad x \equiv \{h,\ \eta_\nu,\ \varphi_\nu\}$$

und

$$e \equiv \{h,\ \eta_\nu\}.$$

Die letzte Formel können wir auch wie folgt schreiben:

$$(2.) \qquad e \equiv \{h,\ \eta_{2\nu-1},\ \eta_{2\nu}\}.$$

Bemerken wir nun, dass:

$$h \sim h; \quad \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1}; \quad \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu}$$

und wenden auf die beiden Formeln (1.) und (2.) den Satz (E.) §. 3 an, so erhalten wir:

$$x \sim e;$$

w. z. b. w.

§. 7.

Es liegt der Gedanke nahe, zum Beweise von (A.) an Stelle des von uns benutzten Kettenbruches die Darstellungsform des unendlichen Decimalbruches zu wählen; obgleich es den Anschein haben könnte, dass dieser Weg schneller zum Ziele geführt haben würde, so bringt derselbe trotzdem eine Schwierigkeit mit sich, auf welche ich hier aufmerksam machen will; sie war der Grund, weshalb ich auf den Gebrauch der Decimalbrüche bei dieser Untersuchung verzichtet habe.

Hat man beispielsweise zwei Veränderliche x_1 und x_2 und setzt:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \cdots,$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \cdots + \frac{\beta_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

mit der Bestimmung, dass die Zahlen α_ν, β_ν ganze Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq 9$ werden und nicht von einem gewissen ν an stets den Werth 0 annehmen (ausgenommen wenn x_1 oder x_2 selbst gleich Null sind), so werden diese Darstellungen von x_1, x_2 in allen Fällen eindeutig bestimmt sein, d. h. x_1 und x_2 bestimmen die unendlichen Zahlenreihen α_ν und β_ν, und umgekehrt. Leitet man nun aus x_1 und x_2 eine Zahl:

$$t = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \cdots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

her, indem man setzt:

$$\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu; \quad \gamma_{2\nu} = \beta_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots \infty,$$

so ist hiermit eine eindeutige Beziehung zwischen dem System x_1, x_2 und der einen Veränderlichen t hergestellt; denn ***nur ein einziges*** Werthsystem x_1, x_2 führt zu einem gegebenen Werthe von t. Die Veränderliche t nimmt aber, und dies ist der hier zu beachtende Umstand, nicht alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ an, sie ist in ihrer Veränderlichkeit beschränkt, während x_1 und x_2 keiner Beschränkung innerhalb desselben Intervalles unterworfen werden.

Alle Werthe der Reihensumme:

$$\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \cdots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \cdots,$$

bei welchen von einem gewissen $\nu > 1$ an alle $\gamma_{2\nu-1}$ oder alle $\gamma_{2\nu}$ den Werth Null haben, müssen als von dem Veränderlichkeitsgebiet von t aus-

geschlossen angesehen werden, weil sie auf ausgeschlossene, nämlich endliche Decimalbruchdarstellungen von x_1 oder x_2 zurückführen würden.

§. 8.

Nachdem in den vorangehenden Paragraphen die beabsichtigte Untersuchung zu Ende geführt ist, mögen zum Schlusse einige erweiternde Bemerkungen Platz finden. Der Satz (A.) und demgemäss der Satz (B.) sind einer Verallgemeinerung fähig, wonach auch stetige Mannigfaltigkeiten von einer unendlich grossen Dimensionenzahl dieselbe Mächtigkeit haben, wie stetige Mannigfaltigkeiten von einer Dimension; diese Verallgemeinerung ist jedoch wesentlich an eine Voraussetzung gebunden, dass nämlich die unendlich vielen Dimensionen selbst eine Mannigfaltigkeit bilden, welche die Mächtigkeit der ganzen positiven Zahlenreihe hat.

An Stelle des Satzes (A.) tritt hier der folgende:

(A'.) „Ist $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ eine einfach unendliche Reihe von einander unabhängiger, veränderlicher, reeller Grössen, von denen jede alle Werthe, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, und ist t eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraume $(0 \leqq t \leqq 1)$ wie jene, so ist es möglich, die eine Grösse t dem Systeme der unendlich vielen $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ eindeutig und vollständig zuzuordnen."

Dieser Satz (A'.) wird mit Hülfe des Satzes (D.), §. 3 zurückgeführt auf den folgenden:

(C'.) „Ist $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$ eine unendliche Reihe von einander unabhängiger veränderlicher Grössen, von denen jede alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles $(0\ldots1)$ annehmen kann und ist d eine andere irrationale Veränderliche mit dem nämlichen Spielraum, so ist es möglich die eine Grösse d dem Systeme der unendlich vielen Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$ eindeutig und vollständig zuzuordnen."

Der Beweis von (C'.) geschieht am einfachsten, indem man unter Anwendung der Kettenbruchentwickelung, wie in §. 2, setzt:

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots) \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots \infty,$$
$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \ldots)$$

und zwischen den ganzen positiven Zahlen α und β den Zusammenhang

herstellt:

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda,$$

wo

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}.$$

Es hat nämlich die Function $\mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}$, wie leicht zu zeigen, die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie alle positiven ganzen Zahlen und jede nur einmal darstellt, wenn in ihr μ und ν unabhängig von einander ebenfalls jeden positiven, ganzzahligen Werth erhalten.

Mit dem Satze (A'.) scheint aber zugleich die Grenze erreicht zu sein, bis zu welcher eine Verallgemeinerung des Satzes (A.) und seiner Folgerungen möglich ist.

Da auf diese Weise für ein ausserordentlich reiches und weites Gebiet von Mannigfaltigkeiten die Eigenschaft nachgewiesen ist, sich eindeutig und vollständig einer begränzten, stetigen Geraden oder einem Theile derselben (unter einem Theile einer Linie jede in ihr enthaltene Mannigfaltigkeit von Punkten verstanden) zuordnen zu lassen, so entsteht die Frage, wie sich die verschiedenen Theile einer stetigen geraden Linie, d. h. die verschiedenen in ihr denkbaren unendlichen Mannigfaltigkeiten von Punkten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verhalten. Entkleiden wir dieses Problem seines geometrischen Gewandes und verstehen, wie dies bereits in §. 3 auseinandergesetzt ist, unter einer *linearen* Mannigfaltigkeit reeller Zahlen jeden denkbaren Inbegriff unendlich vieler, von einander verschiedener reeller Zahlen, so fragt es sich in *wie viel* und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher Mächtigkeit in eine und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden. Durch ein Inductionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, dass die Anzahl der nach diesem Eintheilungsprincip sich ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, dass sie gleich zwei ist.

Darnach würden die linearen Mannigfaltigkeiten aus zwei*) Klassen

*) Dass diese beiden Klassen in Wirklichkeit verschieden sind, folgt aus dem in §. 2 der vorhin citirten Arbeit (Dieses Journal Bd. 77 S. 258 f.) bewiesenen Satze, wonach, wenn eine gesetzmässige, unendliche Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ vorliegt, stets in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ Zahlen η gefunden werden können, welche nicht in der gegebenen Reihe vorkommen.

bestehen, von denen die erste alle Mannigfaltigkeiten in sich fasst, welche sich auf die Form: functio ips. ν (wo ν alle positiven ganzen Zahlen durchläuft) bringen lassen; während die zweite Klasse alle diejenigen Mannigfaltigkeiten in sich aufnimmt, welche auf die Form: functio ips. x (wo x alle reellen Werthe $\geqq 0$ und $\leqq 1$ annehmen kann) zurückführbar sind. Entsprechend diesen beiden Klassen würden daher bei den unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten nur zweierlei Mächtigkeiten vorkommen; die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.

Halle a. S., den 11. Juli 1877.

Ueber die *Steiner*sche Verallgemeinerung des *Malfatti*schen Problems.

(Von Herrn *W. Godt* in Lübeck.)

Die folgenden Zeilen enthalten eine Betrachtung der *Steiner*schen Verallgemeinerung des *Malfatti*schen Problems, entsprungen aus der Lectüre des Aufsatzes von Herrn *Schröter*, dieses Journal Bd. 77, woselbst Literaturnachweise gegeben sind. Es wird ein rein geometrischer Beweis von *Steiners* Construction geliefert, der hoffentlich einigermassen natürlich erscheinen wird.

Dem elementaren Charakter der Beweisführung schien es angemessen, dass einige Bemerkungen erinnerungsweise vorausgeschickt würden. Ausser der Mannigfaltigkeit der Fälle bleibt auch die Vieldeutigkeit der Aufgabe unberücksichtigt. Der Leser wird, wo von Aehnlichkeitspunkten oder Potenzkreisen etc. schlechthin gesprochen wird, leicht den gemeinten erkennen.

I. Zwei Kreise bestimmen einen Büschel, drei ein Netz von Kreisen.

Alle Kreise des Netzes werden von dem Orthogonalkreise der gegebenen rechtwinklig geschnitten. Kreise des Netzes, die durch einen Punkt gehen, gehören einem Büschel an, haben also noch einen gemeinsamen Durchschnittspunkt.

Zwei beliebige Schnittpunktepaare von Kreisen des Netzes liegen wieder auf einem Kreise des Netzes.

Das Netz dreier Kreise fällt zusammen mit der Gesammtheit der Kreise, die ihren Orthogonalkreis rechtwinklig schneiden.

Die Gesammtheit der Kreise, die zwei gegebene unter gleichen Winkeln schneiden, zerfällt in zwei Netze, deren Orthogonalkreise die Potenzkreise der gegebenen sind.

Beide Netze haben einen Kreisbüschel gemein, der den ganzen Büschel der gegebenen rechtwinklig schneidet.

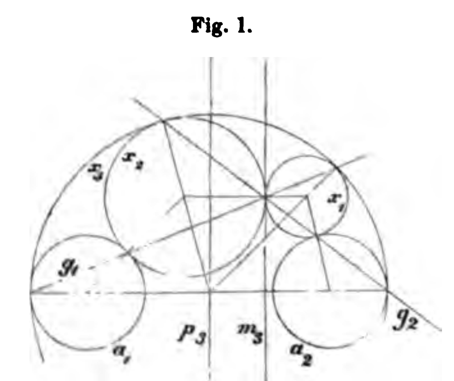
Die Gesammtheit der Kreise, die drei gegebene unter gleichen

Winkeln schneiden, zerfällt in vier Büschel, die alle den Orthogonalkreis der gegebenen enthalten, jeder Büschel ist rechtwinklig zu einer Gruppe von drei Potenzkreisen der gegebenen, die selbst einen Büschel bilden.

Zwei Büschel, die je eine Gruppe von drei Kreisen eines Netzes gleichwinklig schneiden, werden, weil sie beide den Orthogonalkreis enthalten, gleichzeitig von einem Kreise des Netzes rechtwinklig geschnitten.

II. Hat man drei Kreise $x_1 x_2 x_3$, die sich gegenseitig berühren, und werden $x_2 x_3$ noch von einem Kreise a_1, $x_1 x_3$ noch von einem Kreise a_2 berührt, so legen wir einen Kreis g_1 durch die vier Punkte, in denen a_1 und x_1 von x_2 und x_3 berührt werden und einen Kreis g_2 durch die vier Punkte, in denen a_2 und x_2 von x_1 und x_3 berührt werden. Dann haben g_1 und g_2 ausser dem Berührungspunkte von x_1 und x_2 noch einen weiteren Schnittpunkt P. Transformirt man von diesem aus die Figur durch reciproke Radien, so entsteht eine neue, in der g_1 und g_2 gerade Linien sind.

Fig. 1.



Hier sind die in a_1 und a_2 nach den Berührungspunkten mit x_3 gezogenen Radien der Centrale von x_1 und x_2 parallel und gehören daher einem Durchmesser von x_3 an. Ferner ist der Radius von x_3, der nach dem Berührungspunkte mit x_2 geht, der Centrale von a_2 und x_1 parallel und deshalb gleich der Summe der Radien von a_2, x_1 und x_2. Da man aber ebenso einen Radius von x_3 gleich der Summe der Radien von a_1, x_1 und x_2 findet, so sind die Kreise a_1 und a_2 einander gleich. Es ist also ihr Potenzkreis gerade und parallel der gemeinsamen Tangente von x_1 und x_2 in ihrem Berührungspunkte.

Transformirt man nun zurück, so findet man: der Potenzkreis von a_1 und a_2 geht durch den Schnittpunkt P von g_1 und g_2 und wird daselbst von einem Kreise m_3 des Büschels $x_1 x_2$ berührt.

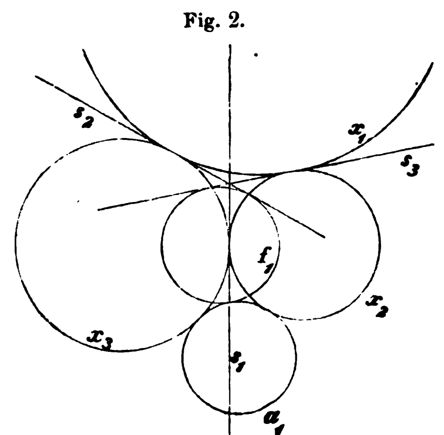
Andere Beziehungen der Figur werden hier nicht benutzt. Der erste Theil des Satzes ist von Herrn *Schröter* a. a. O. gegeben.

III. Hat man wie im vorigen Satze drei Kreise x und drei Kreise s, die respective den Büscheln der x angehören und selbst einen Büschel bilden, so dass zwei von ihnen willkürlich sind, und construirt man zwei Kreise f_1 und a_1 so, dass sie sich einander und ausserdem f_1 die Kreise

s_2 und s_3 gleichartig mit x_1, a_1 die Kreise x_2 und x_3 berühren, so liegt der Berührungspunkt von f_1 und a_1 auf s_1.

Transformirt man nämlich die Figur von einem Schnittpunkte der s durch reciproke Radien, so werden die s gerade Linien. Nun geht s_1 durch den Schnittpunkt gleichartiger Tangenten, d. i. einen Aehnlichkeitspunkt von x_1 und f_1; ferner weil es Potenzlinie der Kreise x_2 und x_3 ist, durch einen Aehnlichkeitspunkt von x_1 und a_1; daher geht es auch durch einen Aehnlichkeitspunkt von a_1 und f_1, nämlich den Berührungspunkt, womit die Behauptung erwiesen ist.

Fig. 2.





IV. Es seien gegeben drei Kreise a. Denken wir uns nach Forderung der *Malfatti*schen Aufgabe die Kreise x gefunden und die Potenzkreise p der a sowie nach II. die Kreise g und m gezogen. Der Kreis g_1 schneidet a_1 und x_1, mithin nach II. auch m_2 und p_2, m_3 und p_3 alle unter demselben Winkel, ebenso g_2 die Kreise $a_2 x_2 m_1 p_1 m_3 p_3$. Nach I. giebt es daher einen Kreis q_3 im Netze der a, der die beiden Kreisbüschel rechtwinklig schneidet, die respective mit g_1 und g_2 gleichartig die Gruppen der Kreise $a_1 p_2 p_3$ und $a_2 p_1 p_3$ gleichwinklig schneiden. Dieser Kreis q_3 ist construirbar. Da er insbesondere g_1, g_2 und m_3 rechtwinklig schneidet, so entsteht aus p_3, wenn man diesen Kreis über q_3 transformirt, ein Kreis s_3, der dem Büschel von x_1 und x_2 angehört.

Hieraus ergiebt sich eine Construction, die aus Verallgemeinerung der *Schröter*schen Analyse a. a. O. entstanden ist.

V. *Steiner* könnte dagegen zu seiner Construction auf folgendem Wege gekommen sein.

Denken wir uns wieder die a gegeben, die x gefunden, so kann man nach Anleitung von III. die Kreisgruppen s und f auf mannigfache Weise anbringen und durch geeignete Wahl der s die f und so aus diesen wieder jene bestimmbar zu machen suchen. Nun kann man zwei s beliebig, also senkrecht zum gemeinsamen Orthogonalkreis r der a annehmen, wobei auch der dritte Kreis s rechtwinklig zu r wird. So schneidet nun r die drei Kreise s_1, s_2 und a_3 rechtwinklig, dieselben drei werden aber von g_3 nach II.

gleichwinklig geschnitten und von f_3 nach Construction berührt, mithin gehören r, f_3 und g_3 demselben Kreisbüschel an, der nach dem in II. und IV. Erörterten auch p_1 und p_2 mit $s_1 s_2 a_3$ unter gleichem Winkel schneidet. Es berührt also f_3 auch p_1 und p_2. Damit ist f_3 bestimmt und *Steiners* Construction abgeleitet.

Hierbei sind die mit s bezeichneten Kreise dieselben wie in IV. Zum Nachweise genügt es zu zeigen, dass die in IV. benutzten s rechtwinklig zu r sind. Es ist aber q_3 nach I. rechtwinklig zu r, und da s_3 aus p_3 über q_3 transformirt ist, schneidet s_3 auch r unter demselben Winkel, wie p_3 es thut, das ist unter einem rechten.

VI. Resultate.

Aufgabe. Zu den Kreisen a drei andre x zu finden, die sich gegenseitig und je zwei a berühren.

Lösung *Steiners*. Construire drei Potenzkreise p der a, die einen Büschel bilden, p_1 zu a_2 und a_3 gehörig etc. Construire einen Berührungskreis f_1 zu a_1, p_2 und p_3, analog auch f_2 und f_3.

Construire einen Kreis s_1, der f_2 und f_3 berührt und durch den Berührungspunkt von f_1 mit a_1 geht. Dieser berührt die gesuchten Kreise x_2 und x_3.

Lösung nach *Schröter*. Construire die p wie vorhin. Suche das Schnittpunktepaar der Potenzkreise von $a_1 p_2 p_3$ und das der Potenzkreise von $a_2 p_1 p_3$ und lege durch beide Paare den Kreis q_3. Transformire p_3 über q_3 in s_3, so berührt s_3 die gesuchten x_1 und x_2.

Fügt man zu der Figur mit den Kreisen $apfqsx$ noch die folgenden hinzu: den Orthogonalkreis r der a, die Kreise g durch je die 4 Punkte, in denen a_1 und x_1 von den übrigen x berührt werden; und die m, die je durch die Schnittpunkte zweier g gehen und die gleichnamigen x berühren, so sind folgende Beziehungen hervorzuheben:

Zwei Kreise g schneiden sich auf einem Kreise p, und dieser wird im Schnittpunkte vom gleichnamigen m berührt. Die Kreise $apqs$ gehören demselben Netze an. Es gehören je zu einem Büschel:

Die Kreise p, die Kreise m, die Kreise s, die gleichnamigen pqs, wobei q der Potenzkreis der beiden anderen ist, der Kreis r mit je zwei gleichnamigen f und g.

Ein Büschel der letzten Art wird von 5 Kreisen der Figur, nämlich dem gleichnamigen a und den ungleichnamigen p und s unter gleichen Winkeln geschnitten. Zwei Büschel dieser Art haben zum gemeinsamen Orthogonalkreis das dritte q.

Dass die m einen Büschel bilden, ergiebt sich, wenn die Figur von einem Schnittpunkte von m_1 und m_2 aus transformirt wird. Es werden dann diese beiden Potenzlinien nicht nur zu den x sondern auch zu den g; also geht die dritte Potenzlinie der x durch den Schnittpunkt von m_1 und m_2 und gleicherweise die dritte Potenzlinie der g. Beide Potenzlinien haben aber noch den Berührungspunkt von x_1 und x_2, weil er zugleich Schnittpunkt von g_1 und g_2 ist, gemein, müssen also identisch und aus m_3 transformirt sein.

Lübeck, im Mai 1877.

Ueber die Wurzeln der Fundamentalgleichung, die zu einem singulären Punkte einer linearen Differentialgleichung gehört.

(Von Herrn *Hamburger*.)

In der Abhandlung „Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen etc.“ (dieses Journal Bd. 83 p. 185 ff.) ist folgender Satz bewiesen worden:

Ist der Nullpunkt der x-Ebene ein singulärer Punkt einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in y, deren Coefficienten eindeutige Functionen von x sind, so bringe man vermöge der gegebenen Differentialgleichung sämmtliche Ableitungen von y, nach $\log x$ genommen, auf die Form:

$$\frac{d^{\varkappa}\log y}{(d\log x)^{\varkappa}} = \varphi_1^{\varkappa}(x)\,y + \varphi_2^{\varkappa}(x)\frac{dy}{d\log x} + \cdots + \varphi_n^{\varkappa}\frac{d^{n-1}y}{(d\log x)^{n-1}},$$

wo die φ rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sind, und setze

$$(1.)\qquad a_{r,s} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty}\varphi_r^{s+\varkappa-1}(x_0)\frac{(2\pi i)^{\varkappa}}{\varkappa!},$$

unter x_0 einen Werth von x verstanden, dessen absoluter Betrag $|x_0|$ der Bedingung

$$0 < x_0 < \varrho e^{-2\pi}$$

genügt, falls ϱ den Abstand des Nullpunktes von dem ihm zunächst gelegenen singulären Punkte bedeutet. Alsdann geht das System von particulären Integralen $y_1 \ldots y_n$, welches dadurch definirt ist, dass für $x = x_0$ die Anfangswerthe

$$\begin{array}{llll}
y_1 = 1 & \dfrac{dy_1}{d\log x} = 0 & \ldots & \dfrac{d^{n-1}y_1}{(d\log x)^{n-1}} = 0 \\
y_2 = 0 & \dfrac{dy_2}{d\log x} = 1 & \ldots & \dfrac{d^{n-1}y_2}{(d\log x)^{n-1}} = 0 \\
\vdots & & & \\
y_n = 0 & \dfrac{dy_n}{d\log x} = 0 & \ldots & \dfrac{d^{n-1}y_n}{(d\log x)^{n-1}} = 1
\end{array}$$

gelten, nach einem positiven Umlauf um den Nullpunkt in das System

$$(2.)\quad \bar{y}_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n, \quad \ldots \quad \bar{y}_n = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n$$

über, und die Gleichung, welche nach Herrn *Fuchs* die zum Nullpunkte gehörige Fundamentalgleichung genannt wird, lautet:

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\omega & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Während die Grössen $a_{r,s}$ sich mit x_0 ändern, sind die Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_n$ der Gleichung (3.) von x_0, so lange dieser Werth innerhalb des vorgeschriebenen Bereiches liegt, unabhängig.

Es soll hier nunmehr gezeigt werden, dass man die Summen gleich hoher Potenzen dieser Wurzeln direct durch convergente Reihen darstellen kann.

Denkt man sich nämlich den Punkt x_0 in solcher Lage, dass

$$0 < |x_0| < \varrho e^{-2\lambda\pi i},$$

wo λ eine positive ganze Zahl bedeutet, so kann man die Werthänderungen des Systems der Integrale y_α nach λ positiven oder negativen Umläufen um den Nullpunkt dadurch erhalten, dass man in den Gleichungen (2.) als Substitutionscoefficienten Grössen $a_{r,s}^{\pm\lambda}$ einführt, die aus $a_{r,s}$ hervorgehen, indem man in den Ausdrücken (1.) für dieselben bez. $\pm 2\lambda\pi i$ statt $2\pi i$ substituirt (l. c. p. 190). Die Wurzeln derjenigen Gleichung, die aus (3.) durch diese Substitution hervorgeht, sind offenbar die $\pm\lambda^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln der Gleichung (3.), und da ihre Summe den Werth

$$a_{11}^{\pm\lambda} + a_{22}^{\pm\lambda} + \cdots + a_{n,n}^{\pm\lambda}$$

hat, so folgt

$$(4.)\quad \begin{cases} \omega_1^\lambda + \omega_2^\lambda + \cdots + \omega_n^\lambda \\ = \sum\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} \{\varphi_1^\varkappa(x_0) + \varphi_2^{\varkappa+1}(x_0) + \cdots + \varphi_n^{\varkappa+n-1}(x_0)\} \dfrac{(2\lambda\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}, \\ \omega_1^{-\lambda} + \omega_2^{-\lambda} + \cdots + \omega_n^{-\lambda} \\ = \sum\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} \{\varphi_1^\varkappa(x_0) + \varphi_2^{(\varkappa+1)}(x_0) + \cdots + \varphi_n^{\varkappa+n-1}(x_0)\} \dfrac{(-2\lambda\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}. \end{cases}$$

wo die Ausdrücke auf der rechten Seite, innerhalb des oben angegebenen Bereichs von x_0, gegen von x_0 unabhängige Werthe convergiren. Dass die Gleichungen (4.) auch für $\lambda = 0$ gültig bleiben, erhellt, wenn man beachtet, dass für jedes x

$$\varphi_1^{(0)}(x) = \varphi_2^{(1)}(x) = \cdots = \varphi_n^{(n-1)}(x) = 1$$

ist. Aus den Ausdrücken für die Potenzsummen lassen sich die Coefficienten der nach Potenzen von ω entwickelten Gleichung (3.) in bekannter Weise berechnen.

Berlin, September 1877.

Zur Theorie der *Bernoulli*schen Zahlen.

Auszug aus einem Schreiben an Herrn *Borchardt*.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

Ist B_n die n^{te} *Bernoulli*sche Zahl, $(m)_n$ der n^{te} Binomialcoefficient der Potenz m und setzt man

$$(-1)^n B_n = A_n + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots + \frac{1}{\lambda},$$

wo A_n eine ganze Zahl ist und $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ die sämmtlichen Primzahlen bedeuten, die so beschaffen sind, dass $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \ldots \frac{\lambda-1}{2}$ Divisoren von n sind, so hat man, wie Herr *Hermite* gezeigt hat (Bd. 81 pag. 94 dieses Journals) die merkwürdige Relation

$$(\alpha.) \quad (2n+1)_2 A_1 + (2n+1)_4 A_2 + \cdots + (2n+1)_{2n} A_n = 1 - n - 2^{2n-1} - \Sigma S_p,$$

wo

$$S_p = \frac{1}{p}[(2n+1)_{p-1} + (2n+1)_{2p-2} + (2n+1)_{3p-3} + \cdots]$$

und das Summenzeichen sich auf alle ungeraden Primzahlen p bezieht, welche nicht grösser als $2n+1$ sind. Herr *Hermite* geht hierbei von der bekannten (*Moivre*schen) Formel aus, welche man in der Form

$$(-1)^n (2n+1)_1 B_n + (-1)^{n-1}(2n+1)_3 B_{n-1} + \cdots - (2n+1)_{2n-1} B_1 + n = \tfrac{1}{2}$$

schreiben kann. Verbindet man diese Formel mit der folgenden

$$(-1)^n (2n+2)_2 B_n + (-1)^{n-1}(2n+2)_4 B_{n-1} + \cdots - (2n+2, 2n) B_1 + n = 0,$$

welche *Jacobi* in wenig veränderter Form gegeben hat (Bd. 12 pag. 265 dieses Journals) durch Subtraction, und berücksichtigt, dass

$$(m+1)_{k+1} - (m)_k = (m)_{k+1},$$

so ergiebt sich

$$(-1)^{n+1}(2n+1)_2 B_n + (-1)^n (2n+1)_4 B_{n-1} + \cdots + (2n+1)_{2n} B_1 = \tfrac{1}{2},$$

wofür man auch

$$(2n+1)_1 B_1 - (2n+1)_3 B_2 + \cdots + (-1)^{n+1}(2n+1)_{2n-1} B_n = \tfrac{1}{2}$$

schreiben kann.

Legt man diese letztere Formel zu Grunde und befolgt im Uebrigen genau das von Herrn *Hermite* angegebene Verfahren, so erhält man eine andere Relation zwischen den Grössen A, die ihrer Form nach noch etwas einfacher ist, als die von Herrn *Hermite* bewiesene. Man findet nämlich

$$(\beta.)\quad \left\{\begin{array}{l} (2n+1)_1(A_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) \\ +(2n+1)_3(A_2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +(2n+1)_{2n-1}(A_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots) \\ +\frac{1}{2} = 0. \end{array}\right.$$

Bezeichnet man nun die Summe der Glieder dieses Ausdrucks, welche den Factor $\frac{1}{p}$ enthalten, durch s_p, so dass

$$s_p = \frac{1}{p}[(2n+1)_{p-2}+(2n+1)_{2p-3}+(2n+1)_{3p-4}+\cdots],$$

so lässt sich leicht zeigen, dass s_p eine ganze Zahl ist. Betrachtet man nämlich zuerst den Ausdruck

$$\sigma_p = (2n+2)_{p-1}+(2n+2)_{2p-2}+(2n+2)_{3p-3}+\cdots,$$

so findet man, dass σ_p nach dem Modul p entweder $\equiv 0$ oder $\equiv 1$ ist, je nachdem $p-1$ kein oder ein Factor von $2n+2$ ist. Im ersten Falle bleibt die Beweisführung, durch welche Herr *Hermite* zeigt, dass $S_p \equiv 0$ (mod. p), unverändert dieselbe. Im zweiten Falle sei $2n+2 = k(p-1)$, und es bezeichne ω die verschiedenen Wurzeln der Congruenz $x^{p-1}-1 \equiv 0$ (mod. p), also die Zahlen 1, 2, ... $p-1$, dann ist $\Sigma(1+\omega)^{2n+2} \equiv p-2$. Andererseits ist

$$\Sigma(1+\omega)^{2n+2} \equiv p-1+(p-1)[(2n+2)_{p-1}+(2n+2)_{2p-2}+\cdots+(2n+2)_{2n+2}],$$

mithin

$$(2n+2)_{p-1}+(2n+2)_{2p-2}+\cdots+(2n+2)_{2n+2} \equiv 1,$$

oder da $(2n+2)_{2n+2} = 1$,

$$(2n+2)_{p-1}+(2n+2)_{2p-2}+\cdots+(2n+2)_{(k-1)(p-1)} \equiv 0.$$

Nun ist

$$(2n+2)_{p-1}-(2n+1)_{p-1} = (2n+1)_{p-2};\ (2n+2)_{2p-2}-(2n+1)_{2p-2} = (2n+1)_{2p-3} \text{ u. s. w.}$$

Ist also $2n+2$ nicht durch $p-1$ theilbar, so folgt aus

$$(2n+2)_{p-1}+(2n+2)_{2p-2}+\cdots \equiv 0$$

und

$$(2n+1)_{p-1}+(2n+1)_{2p-2}+\cdots \equiv 0,$$

dass auch

$$(2n+1)_{p-2}+(2n+1)_{2p-3}+\cdots \equiv 0.$$

Ist $2n+2$ durch $p-1$ theilbar, so ist

$$(2n+2)_{p-1}+(2n+2)_{2p-2}+\cdots+(2n+2)_{(k-1)(p-1)} \equiv 0$$

und zugleich

$$(2n+1)_{p-1}+(2n+1)_{2p-2}+\cdots+(2n+1)_{(k-1)(p-1)} \equiv 0,$$

also auch

$$(2n+1)_{p-2}+(2n+1)_{2p-3}+\cdots+(2n+1)_{(k-1)(p-1)-1} \equiv 0.$$

Jedenfalls ist also s_p eine ganze Zahl. Bezeichnet Σs_p die Summe aller Ausdrücke, die man erhält, wenn man in s_p statt p alle ungeraden Primzahlen setzt, die nicht grösser als $2n+1$ sind, so findet man aus (β.) die Relation

$$(\gamma.)\quad (2n+1)_1 A_1+(2n+1)_3 A_2+\cdots+(2n+1)_{2n-1} A_n = -2^{2n-1}-\Sigma s_p.$$

Die Verbindung der zwei Relationen (α.) und (γ.) durch Subtraction giebt dann noch die Relation

$$(n-1)(2n+1)_1 A_1+\frac{n-3}{2}(2n+1)_3 A_2+\cdots+\frac{n+1-2k}{k}(2n+1)_{2k-1} A_k+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1-n}{n}(2n+1)_{2n-1} A_n = 1-n+\Sigma s_p-\Sigma S_p.$$

Selbstverständlich gilt von s_p dieselbe Bemerkung, welche Herr *Hermite* in Beziehung auf S_p gemacht hat, dass nämlich der Ausdruck

$$\frac{x^{2n+1}}{p}\left[\frac{(2n+1)_{p-2}}{x^{p-1}}+\frac{(2n+1)_{2p-3}}{x^{2p-2}}+\cdots\right],$$

der in s_p übergeht, wenn man $x=1$ setzt, für jede Primzahl p, die nicht grösser als $2n+1$ ist, eine ganze Zahl ist, sobald x eine solche ist.

Göttingen, den 24. September 1877.

Auszug eines Schreibens an Herrn *Stern* über die „Verallgemeinerung einer *Jacobi*schen Formel.“

(Von Herrn *E. Lampe.*)

. . . Die pag. 216 dieses Bandes von Ihnen mitgetheilte Formel ist ein specieller Fall einer allgemeinen Relation für die Summen der Potenzen aller ganzen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Zahl x.

Setzt man nämlich, unter i eine ganze Zahl verstehend,

$$S_i(x) = 1^i+2^i+3^i+\cdots+x^i,$$

so ist bekanntlich:

$$(1.)\quad \begin{cases} S_i(x) = \frac{1}{i+1}x^{i+1}+\frac{1}{2}x^i+\frac{1}{2}B_1\binom{i}{1}x^{i-1}-\frac{1}{4}B_2\binom{i}{3}x^{i-3}+\frac{1}{6}B_3\binom{i}{5}x^{i-5}-\cdots, \\ S_i(x-1) = \frac{1}{i+1}x^{i+1}-\frac{1}{2}x^i+\frac{1}{2}B_1\binom{i}{1}x^{i-1}-\frac{1}{4}B_2\binom{i}{3}x^{i-3}+\frac{1}{6}B_3\binom{i}{5}x^{i-5}-\cdots. \end{cases}$$

B_1, B_2, B_3, ... bedeuten hierin die *Bernoulli*schen Zahlen, das Symbol $\binom{i}{k}$ die Zahl $\frac{i(i-1)\dots(i-k+1)}{1.2.3\dots k}$.

Die zweite der Formeln (1.) unterscheidet sich von der ersten nur durch das Vorzeichen von $\frac{1}{2}x^i$. Für ein ungerades i, ausgenommen $i=1$, schliessen die rechten Seiten beider Gleichungen mit einem Gliede, welches das Quadrat von x enthält; für ein gerades i und für $i=1$ dagegen mit einem Gliede, das die erste Potenz von x enthält. Daher muss man in diesen Formeln dem Symbole $\binom{2\mu+1}{2\mu+1}$ immer $\left(\text{also auch } \binom{1}{1}\right)$, abweichend vom sonstigen Gebrauche, den Werth 0 beilegen. Würde man ihm nämlich den Werth 1 geben, den es sonst hat, so würde das letzte Glied für ein ungerades i die 0te Potenz von x enthalten, während in diesem Falle die Formeln mit einem Gliede schliessen, welches in x quadratisch ist. Mit Berücksichtigung dieses besonderen Umstandes sind demnach die Formeln so weit fortzusetzen, bis man $i \overline{\gtrless} m$ in dem Symbole $\binom{i}{m}$ hat.

Bezeichnet nun $S_i^n(x)$ die n^{te} Potenz von $S_i(x)$, so ist:

$$(2.)\quad \begin{cases} S_i^n(x)-S_i^n(x-1) = \left(\frac{1}{i+1}x^{i+1}+\frac{1}{2}x^i+\frac{1}{2}B_1\binom{i}{1}x^{i-1}-\frac{1}{4}B_2\binom{i}{3}x^{i-3}+\cdots\right)^n \\ \qquad -\left(\frac{1}{i+1}x^{i+1}-\frac{1}{2}x^i+\frac{1}{2}B_1\binom{i}{1}x^{i-1}-\frac{1}{4}B_2\binom{i}{3}x^{i-3}+\cdots\right)^n. \end{cases}$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach Potenzen von x, so verschwinden offenbar die Glieder, welche x in den Potenzen $n(i+1)$, $n(i+1)-2$, $n(i+1)-4$, ... enthalten, und es bleiben in der Entwickelung nur die Glieder, welche x in den Potenzen $n(i+1)-1$, $n(i+1)-3$, $n(i+1)-5$, ... enthalten. Die Endglieder der Entwickelungen sind, je nachdem i gerade oder i ungerade (ausser $i=1$), beziehungsweise diejenigen mit den Potenzen x^{n-1+i} oder x^{2n-2+i}. Man hat also:

$$(2^a.)\qquad S_i^n(x)-S_i^n(x-1) = A_1x^{n(i+1)-1}+A_2x^{n(i+1)-3}+A_3x^{n(i+1)-5}+\cdots,$$

worin die A die Coefficienten der Entwickelung der rechten Seite von (2.) nach fallenden Potenzen von x bedeuten.

Setzt man in (2^a.) statt x der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... x, so erhält man $S_i^n(1)-S_i^n(0)$, $S_i^n(2)-S_i^n(1)$, $S_i^n(3)-S_i^n(2)$, ..., $S_i^n(x)-S_i^n(x-1)$, und addirt man sämmtliche resultirenden Gleichungen, so folgt:

$$S_i^n = A_1S_{n(i+1)-1}+A_2S_{n(i+1)-3}+A_3S_{n(i+1)-5}+\cdots,$$

worin bei den Summen S die gemeinsame Grenzzahl x überall fortgelassen ist. Symbolisch kann man dies Resultat so schreiben:

$$(3.)\qquad \begin{cases} S_i^n = \left(\frac{1}{i+1}S^{i+1}+\frac{1}{2}S^i+\frac{1}{2}B_1\binom{i}{1}S^{i-1}-\frac{1}{4}B_2\binom{i}{3}S^{i-3}+\cdots\right)^n \\ \qquad -\left(\frac{1}{i+1}S^{i+1}-\frac{1}{2}S^i+\frac{1}{2}B_1\binom{i}{1}S^{i-1}-\frac{1}{4}B_2\binom{i}{3}S^{i-3}+\cdots\right)^n. \end{cases}$$

Man hat die rechte Seite dieser Gleichung nach Potenzen von S zu entwickeln und danach die zu den S gehörigen Exponenten als *untere* Indices dieser Buchstaben zu schreiben.

Ist z. B. $i=1$, so hat man:

$$S_1^n = (\tfrac{1}{2}S^2+\tfrac{1}{2}S)^n-(\tfrac{1}{2}S^2-\tfrac{1}{2}S)^n.$$

Verfährt man hier nach der für (3.) gegebenen Regel, so folgt nach Multiplication der Gleichung mit 2^{n-1}:

$$(4.)\qquad 2^{n-1}S_1^n = \binom{n}{1}S_{2n-1}+\binom{n}{3}S_{2n-3}+\binom{n}{5}S_{2n-5}+\cdots,$$

die von Ihnen durch Induction bewiesene Formel.

Ausserdem ist übrigens klar, dass man in ganz ähnlicher Weise symbolisch hat:

$$(5.)\qquad \begin{cases} S_iS_kS_l\ldots = \left(\frac{1}{i+1}S^{i+1}+\frac{1}{2}S^i+\cdots\right)\left(\frac{1}{k+1}S^{k+1}+\frac{1}{2}S^k+\cdots\right)\left(\frac{1}{l+1}S^{l+1}+\frac{1}{2}S^l+\cdots\right)\cdots \\ \qquad -\left(\frac{1}{i+1}S^{i+1}-\frac{1}{2}S^i+\cdots\right)\left(\frac{1}{k+1}S^{k+1}-\frac{1}{2}S^k+\cdots\right)\left(\frac{1}{l+1}S^{l+1}-\frac{1}{2}S^l+\cdots\right)\cdots \end{cases}$$

Aus (5.) folgt für das Product $S_i S_k$ z. B.:

$$
(6.) \quad \begin{cases} S_i S_k = \left(\frac{1}{i+1}+\frac{1}{k+1}\right)S_{i+k+1}+\frac{1}{2}B_1\left(\binom{i}{1}+\binom{k}{1}\right)S_{i+k-1} \\ \qquad\qquad -\frac{1}{4}B_2\left(\binom{i}{3}+\binom{k}{3}\right)S_{i+k-3}+\cdots \end{cases}
$$

In den Formeln (3.), (5.) und (6.) ist das Symbol $\binom{i}{m}=0$, wenn $i \overline{\gtrless} m$, dagegen ist in (3.) und (4.) der von der Potenzerhebung herrührende Coefficient $\binom{n}{n}$ wie gewöhnlich gleich 1 zu setzen.

Berlin, den 5. October 1877.

Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde.

(Von *Hermann Günther Grassmann* *) in Stettin.)

Herr *Reye* hat in einer Reihe von Aufsätzen, die in diesem Journal veröffentlicht sind, und unter denen ich besonders Bd. 78, S. 97 ff. „Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen," Bd. 79, S. 159 ff. „Ueber algebraische Flächen, die zu einander apolar sind," Bd. 82, S. 1 ff. „Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen" nebst den Anwendungen auf Flächen zweiten Grades Bd. 82, S. 54 ff., S. 173 ff. hervorhebe, die Theorie der algebraischen Gebilde in sehr fruchtreicher Weise erweitert. Die Methoden, die er angewandt hat, werden durch die Principien der Ausdehnungslehre ausserordentlich vereinfacht, und neue Bahnen eröffnen sich von da aus in dies noch immer schwer zugängliche und doch so reichhaltige Gebiet.

Die Principien der Ausdehnungslehre, auf die ich zurückgehe, finden sich zuerst andeutungsweise in meiner Ausdehnungslehre von 1844 und in der von 1862. In der letzteren, No. 350, ist gezeigt, wie man jede Function von m veränderlichen Zahlgrössen $x_1, \dots x_m$ in eine Function einer einzigen extensiven Grösse x verwandeln kann, welche aus m Einheiten $e_1, \dots e_m$ durch die Zahlgrössen $x_1, \dots x_m$ abgeleitet ist, so nämlich, dass $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m$ ist. Diese Verwandlung wird durch den Begriff der combinatorischen Multiplication vermittelt. Das Product der Einheiten $e_1, \dots e_m$ wird als combinatorisches dadurch charakterisirt, dass dasselbe Null gesetzt wird, sobald eine Einheit mehr als einmal darin als Factor erscheint, und dass durch gegenseitige Vertauschung zweier Factoren das combinatorische Product der Einheiten entgegengesetzten Werth annimmt. Ich bezeichne, der Ausdehnungslehre von 1862 gemäss, das combinatorische Product durch eine eckige Klammer, mit der ich es umschliesse; ferner setze ich das combinatorische Product der sämmtlichen ursprünglichen Einheiten in der gegebenen Reihenfolge $e_1, \dots e_m$ gleich 1, also $[e_1 e_2 \dots e_m] = 1$,

*) Der durch seine Ausdehnungslehre und andere werthvolle Arbeiten um die Wissenschaft hochverdiente Verfasser ist leider am 26. September 1877 gestorben.

so dass also die combinatorischen Producte aus den m Einheiten stets, je nach ihrer Ordnung gleich $+1$ oder -1 sind. Ergänzung einer Einheit nenne ich das combinatorische Product aller übrigen Einheiten und zwar in der Anordnung der Factoren, dass, wenn auf jene Einheit die Einheiten, die in ihrer Ergänzung als Factoren enthalten sind, der Reihe nach folgen, das gesammte combinatorische Product $+1$ ist. Ist also ε_r die Ergänzung der Einheit e_r und bedeutet $[e_r \varepsilon_r]$ das combinatorische Product, in welchem auf e_r nach der Reihe die Einheiten von ε_r als Factoren folgen, so hat man $[e_r \varepsilon_r] = 1$; dagegen $[e_r \varepsilon_s] = 0$, wenn r nicht gleich s ist, weil dann ε_s nothwendig e_r als Factor enthält, das gesammte combinatorische Product also nach dem oben festgestellten Begriffe desselben Null ist. Ich nenne ein solches Product $[e_r \varepsilon_r]$, sofern e_r und ε_r als dessen Factoren betrachtet werden, ein äusseres Product (Ausdehnungslehre von 1844 §. 34, die von 1862 No. 78). Hieraus folgt aber sogleich, da $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m$ gesetzt war, $[x \varepsilon_1] = x_1$, $[x \varepsilon_2] = x_2$ u. s. w., also

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = f([x \varepsilon_1], [x \varepsilon_2], \ldots [x \varepsilon_m]),$$

d. h. die Function von m veränderlichen Zahlgrössen $x_1, \ldots x_m$ ist in eine Function einer einzigen extensiven Grösse x verwandelt. Hieraus habe ich weiter in No. 158 die Folgerung abgeleitet, dass sich jede homogene Function n^{ten} Grades der Veränderlichen $x_1, \ldots x_m$ in der Form $\alpha_n x^n$ darstellen lasse, wo α_n einen Ausdruck mit n Lücken in jedem Gliede darstellt. In der That, wenn f eine homogene Function n^{ten} Grades von $x_1, \ldots x_m$ ist, so kommt in $f = f([x \varepsilon_1], [x \varepsilon_2], \ldots [x \varepsilon_m])$ die extensive Variable x in jedem Gliede n mal als Factor vor. Entfernt man daher x aus diesen Verbindungen $[x \varepsilon_i]$ und setzt an die Stelle, wo x gestanden hat, irgend ein Zeichen, welches die dadurch entstandene Lücke darstellt, und setzt nun den so aus $f([x \varepsilon_1], \ldots [x \varepsilon_m])$ hervorgehenden Ausdruck $= \alpha_n$, so wird $f = \alpha_n x^n$. Das Zeichen, welches man für die entstandene Lücke wählt, ist an sich gleichgültig, kann aber hier füglich ganz entbehrt werden, da der Ausdruck $\alpha_n x^n$ sonst keine Bedeutung hat, wenn nicht α_n ein Ausdruck ist, der in jedem Gliede n Lücken enthält, in die x eintreten soll. Doch ist hierdurch der Begriff des Lückenausdruckes α_n noch nicht erschöpft. Es muss nämlich festgestellt werden, welche Bedeutung α_n erlangt, wenn beliebige n extensive Grössen, z. B. $y_1 y_2 \ldots y_p y^{n-p}$ in die Lücken jedes in α_n enthaltenen Gliedes eintreten sollen. Es ist in der Ausdehnungslehre von 1862 No. 353 festgesetzt, dass $\alpha_n y_1 y_2 \ldots y_p y^{n-p}$ den Ausdruck be-

zeichnet, welcher hervorgeht, wenn man die Factoren $y_1 y_2 \ldots y_p y^{n-p}$ nach und nach in allen möglichen verschiedenen Folgen in die Lücken von α_n eintreten lässt und die Summe der so erhaltenen Ausdrücke durch ihre Anzahl dividirt, und in No. 360—363 ist nachgewiesen, dass für diese hinzutretenden Factoren die Gesetze der gewöhnlichen algebraischen Multiplication gelten. Auch kann y hier möglicher Weise die Lücke selbst bezeichnen. Ich beschränke mich, im Anschlusse an die Arbeiten von Herrn ***Reye,*** auf die quaternären Formen im Raume. Die Grössen erster Stufe im Raume sind Punktgrössen, d. h. einfache oder vielfache (mit Coefficienten versehene) Punkte, oder Strecken von bestimmter Länge und Richtung, die als unendlich entfernte Punktgrössen aufzufassen sind. Ich bezeichne diese Grössen erster Stufe mit lateinischen Buchstaben, und verstehe also auch unter den Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4, sowie unter ihren Vielfachensummen, Grössen erster Stufe, also, abgesehen von dem Coefficienten, Punkte. Die Ergänzung von e_1, d. h. das combinatorische Product $[e_2 e_3 e_4]$ bezeichne ich wie oben mit ε_1 und nenne diese Ergänzungen Einheiten dritter Stufe. In der Ausdehnungslehre ist nachgewiesen, dass das combinatorische Product $[e_2 e_3 e_4]$ ein Theil der Ebene ist, die durch die drei Punkte e_2, e_3, e_4 geht und zwar, wenn e_2, e_3, e_4 einfache Punkte sind, das Doppelte des Dreiecks $e_2 e_3 e_4$. Ebenso nenne ich jede Vielfachensumme dieser ergänzenden Einheiten eine Grösse dritter Stufe. Sie stellt nach der Ausdehnungslehre (von 1862) No. 257, 258 wiederum einen Theil einer Ebene dar, und es gelten für sie im Raume genau dieselben Gesetze wie für die Grössen erster Stufe, wenn man nämlich überall den Begriff der ersten Stufe mit dem der dritten vertauscht. Namentlich ist das combinatorische Product dreier Ebenen, abgesehen von dem metrischen Werthe, der Durchschnittspunkt der drei Ebenen. Ich bezeichne im Folgenden überall die Ebenen oder Theile der Ebenen mit griechischen Buchstaben. Hiernach wird nun, wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$, und $\xi = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3 + \xi_4 \varepsilon_4$ ist, wo $x_1, \ldots x_4$, $\xi_1, \ldots \xi_4$ veränderliche Zahlgrössen bedeuten,

$\alpha_n x^n = 0$ die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung,

$a_n \xi^n = 0$ die Gleichung einer Fläche n^{ter} Klasse.

Der Kürze wegen will ich diese Flächen die Flächen α_n oder a_n nennen. Aus den hier dargelegten, schon in meiner Ausdehnungslehre von 1862 enthaltenen Principien habe ich in den Göttinger Nachrichten von 1872 S. 570 die Theorie der Polaren auf die einfachste Weise abgeleitet, und es bedarf

nur einer geringen Nachhülfe um die dort niedergelegte Methode so zu erweitern, dass sie zugleich die von Herrn *Reye* ausgeführte, erweiterte Theorie der Polaren und die Theorie der Apolaren in sich schliesst. Es knüpft sich jene Methode an die Aufgabe, die Durchschnittspunkte einer geraden Linie bc mit einem Gebilde n^{ter} Ordnung zu finden. Die Aufgabe ist dort für den Fall behandelt, dass dieses Gebilde eine Curve n^{ter} Ordnung in der Ebene sei. Es lässt sich dies aber ohne irgend eine Aenderung auf den Fall übertragen, wo das Gebilde eine Fläche n^{ter} Ordnung im Raume ist. Jeder Punkt der geraden Linie bc lässt sich in der Form $b+\lambda c$ darstellen, wo b und c Punkte und λ eine veränderliche Zahl ist. Ist nun $\alpha_n x^n = 0$ eine Fläche n^{ter} Ordnung, so liefert die Gleichung $\alpha_n(b+\lambda c)^n = 0$ nach λ gelöst die n Durchschnittspunkte der geraden Linie bc und der Fläche $\alpha_n x^n = 0$. Die Entwickelung giebt

$$(1.)\qquad \alpha_n b^n + n\alpha_n b^{n-1}c.\lambda + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_n b^{n-2}c^2.\lambda^2 + \cdots = 0.$$

Sind die k ersten Glieder dieser Gleichung Null, so sind auch k Werthe von λ Null, d. h. die Gerade bc berührt die genannte Fläche k-punktig in b. Sind also die k ersten Glieder der Gleichung (1.) für jeden Werth von c gleich Null, so muss jede durch b gezogene gerade Linie die Fläche α_n k-punktig treffen, d. h. der Punkt b ist ein k-facher Punkt der Fläche α_n. Setzen wir nun einen Ausdruck α_k mit k Lücken, die durch Punkte ausgefüllt werden sollen, nur dann selbst gleich Null, wenn er mit beliebigen k Punkten multiplicirt Null giebt, oder, anders ausgedrückt, wenn die sämmtlichen Coefficienten der Form $\alpha_k x^k$ Null sind, so können wir sagen, $\alpha_n b^{n-k} = 0$ drücke aus, dass b ein $(k+1)$-facher Punkt der Fläche α_n sei, namentlich drücke dann $\alpha_n b^{n-1} = 0$ aus, dass b ein Doppelpunkt der Fläche α_n sei. Die Glieder in der obigen Gleichung (1.) sind, wenn man c veränderlich etwa gleich x setzt, die Polaren von b, nämlich die Fläche $\alpha_n b$, d. h. die Fläche, deren Gleichung $\alpha_n b x^{n-1} = 0$ ist, die sogenannte erste Polare, $\alpha_n b^2$ die zweite u. s. w. Ich habe in dem angeführten Aufsatze die Benennung dahin geändert, dass ich $\alpha_n b$ die Polare von b, $\alpha_n b^2$ die Polare von b^2 u. s. w., $\alpha_n b_1 b_2 \ldots b_k$ die Polare von $b_1 b_2 \ldots b_k$ genannt habe. Da man nun das algebraische Product $b_1 b_2 \ldots b_k$ als Fläche k^{ter} Klasse betrachten kann, die in die Punkte b_1, b_2, ... b_k zerfällt, und jede Fläche k^{ter} Klasse als Vielfachensumme solcher Flächen darstellen kann, so lag es nahe, die Theorie der Polaren in dieser Weise

zu erweitern. Aber ich habe diesen wichtigen Schritt nicht selbständig gethan, sondern erst, nachdem ich *Reyes* oben citirte Abhandlung in diesem Journal Bd. 78 gelesen hatte. Aber die angedeutete Idee ist für die Auffassung der allgemeinen Polarentheorie von fundamentaler Wichtigkeit, und ich werde sie daher hier noch nach einer etwas veränderten darlegen. Ich habe gesagt, dass man das algebraische Product $b_1 b_2 \dots b_k$ als Fläche k^{ter} Klasse betrachten kann; die Gleichung dieser Fläche ist $[b_1\xi][b_2\xi]\dots[b_k\xi]=0$, wo $[b_1\xi]$ das äussere Product des Punktes b_1 und der Ebene ξ ist, und gleich Null gesetzt, aussagt, dass die Ebene ξ durch den Punkt b_1 geht. Nun bezeichne ich mit $a^{(k)}$ die Vielfachensumme der algebraischen Producte von je k Punkten und nenne sie eine Form k^{ter} Klasse. Es verwandelt sich $a^{(k)}$ in a_k, wenn man jedem dieser Punkte noch eine Lücke dritter Stufe als zweiten Factor des äusseren Productes hinzufügt; es sind also $a^{(k)}$ und a_k nur formell verschieden, und beide stellen dieselbe Fläche k^{ter} Klasse dar. Ich bezeichne das obige Product $[b_1\xi][b_2\xi]\dots[b_k\xi]$ mit $[b_1 b_2 \dots b_k . \xi^k]$ und verstehe allgemeiner unter dem äusseren Producte zweier Factoren, von denen der erste ein algebraisches Product von m Punkten, der andere ein algebraisches Product von n Ebenen ist, also unter $[b_1 \dots b_m . \beta_1 \dots \beta_n]$, wenn m kleiner oder ebenso gross als n ist, den Ausdruck, welcher hervorgeht, wenn man zuerst jeden der Punkte $b_1 \dots b_m$ mit einer beliebigen der Ebenen $\beta_1 \dots \beta_n$ zu einem äusseren Producte verbindet, und die sämmtlich möglichen verschiedenen Glieder, die auf diese Weise aus $b_1 \dots b_m \beta_1 \dots \beta_n$ entspringen, addirt und die Summe durch die Anzahl der Glieder dividirt. So z. B. ist

$$[b_1 b_2 . \beta_1 \beta_2] = \frac{[b_1\beta_1].[b_2\beta_2]+[b_1\beta_2].[b_2\beta_1]}{2}, \quad [b_1 . \beta_1\beta_2] = \frac{[b_1\beta_1].\beta_2+[b_1\beta_2].\beta_1}{2}.$$

Man sieht, dass jener Ausdruck $[b_1 \dots b_m . \beta_1 \dots \beta_n]$ nur formell verschieden ist von dem oben definirten Ausdrucke $[x\beta_1]\dots[x\beta_n] b_1 \dots b_m$, wenn x das Zeichen der Lücke ist, und dass $a_n \xi^n$ identisch ist mit $[a^{(n)}\xi^n]$ und daher auch die oben nachgewiesenen Gesetze für diese neuen Formen gelten. Es versteht sich von selbst, dass, wenn m grösser ist als n, man $\beta_1 \dots \beta_n$ auf alle möglichen Arten mit n der Punkte $b_1 \dots b_m$ zu äusseren Producten $[b_r \beta_s]$ zu verbinden und im übrigen ebenso zu verfahren hat, und dass man ferner auch $[\beta_1 \dots \beta_m . b_1 \dots b_n]$ auf entsprechende Weise zu definiren hat. Ich ziehe diese Formen als für die Anwendung bequemer den früheren vor. Ist nun $\alpha^{(n)}$ eine Form n^{ter} Ordnung und $a^{(m)}$ eine Form m^{ter} Klasse, so wird nach

dem Obigen $[\alpha^{(n)}.a^{(m)}]$ die *Polare* zu jenen zwei Formen. Diese Polare ist eine Form von $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung oder $(m-n)^{\text{ter}}$ Klasse, je nachdem $n>m$ oder $m>n$ ist. Um diesen doppelten Ausdruck zu vermeiden, setze ich fest, dass z. B. eine Form $(-3)^{\text{ter}}$ Ordnung nichts anders bedeuten soll als eine Form dritter Klasse und umgekehrt. Wenn $m=n$ ist, so wird die Polare eine blosse Zahl.

Der so gewonnene Begriff der Polare gestattet die freieste und mannigfachste Anwendung, und schliesst den von Herrn *Reye* aufgestellten Begriff in sich. Um dazu zu gelangen, benutzt man am besten den bekannten Satz: Jede Fläche n^{ter} Klasse lässt sich, wenn man $\nu=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$ beliebige Punkte $b_1, \dots b_\nu$ annimmt, welche nicht in einer und derselben Fläche n^{ter} Ordnung liegen, als Vielfachensumme von ν Flächen n^{ter} Klasse darstellen, welche sich auf die n-fachen Punkte $b_1, \dots b_\nu$ reduciren, oder anders ausgedrückt, jede Form n^{ter} Klasse $a^{(n)}$ lässt sich in der Form

$$a^{(n)} = \mathfrak{a}_1 b_1^n + \cdots + \mathfrak{a}_\nu b_\nu^n$$

darstellen. Dieser Satz, so wie der reciproke, soll weiter unten auf sehr einfache Art bewiesen werden. Sucht man nun zu der Fläche $a^{(n)}$, deren Gleichung $\mathfrak{a}_1[b_1\xi]^n+\cdots+\mathfrak{a}_\nu[b_\nu\xi]^n$, und zu der Fläche k^{ter} Ordnung $\alpha^{(k)}$, deren Gleichung $\mathfrak{b}_1[\beta_1 x]^k+\cdots+\mathfrak{b}_\varkappa[\beta_\varkappa x]^k=0$ ist, wo $\varkappa=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1.2.3}$ und $k<n$ ist, die Polare, so wird diese nach dem Obigen eine Fläche $(n-k)^{\text{ter}}$ Klasse, deren Gleichung $[a^{(n)}\alpha^{(k)}\xi^{n-k}]=0$ d. h. $\sum_{q,r}\mathfrak{a}_q\mathfrak{b}_r b_q^n\beta_r^k\xi^{n-k}=0$ oder $\sum_{q,r}\mathfrak{a}_q\mathfrak{b}_r[b_q\beta_r]^k[b_q\xi]^{n-k}=0$ ist. Diese Bestimmung stimmt mit der von Herrn *Reye* dem Resultate nach überein. Aber auch *Reyes* Apolaren sind aus dem obigen Princip aufs einfachste abzuleiten. Nämlich zwei Formen $a^{(n)}$ und $\alpha^{(m)}$ von n^{ter} Klasse und m^{ter} Ordnung heissen apolar zu einander, wenn die zu ihnen gehörige Polare Null ist, d. h. wenn $[a^{(n)}.\alpha^{(m)}]=0$ ist. Wenn m kleiner als n ist, so heisst das, es muss $[a^{(n)}.\alpha^{(m)}\xi^{n-m}]$ gleich Null sein für jede Ebene ξ; das giebt so viel Bedingungsgleichungen als die Zahl der Coefficienten einer quaternären Form $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades beträgt, also $\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{1.2.3}$ Bedingungsgleichungen. Diese Bedingungsgleichungen erhält man unmittelbar, indem man statt ξ^{n-m} nach und nach die Combinationen mit Wiederholung aus $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ zur $(n-m)^{\text{ten}}$ Klasse setzt. Der interessanteste Fall ist der, wo $n=m$ ist, also $[a^{(n)}.\alpha^{(n)}]=0$ ist.

Wenn sich $a^{(n)}$ auf die Potenz eines Punktes reducirt, so sagt die Gleichung aus, dass dieser Punkt auf der Fläche n^{ter} Ordnung $\alpha^{(n)}$ liege. Wir werden im allgemeinen Falle mit Herrn *Reye* sagen können, dass die Fläche n^{ter} Klasse $a^{(n)}$ auf der Fläche n^{ter} Ordnung $\alpha^{(n)}$ ruhe, oder nach der in der Ausdehnungslehre gewählten Benennung, dass $a^{(n)}$ und $\alpha^{(n)}$ incident sind. Sind e_1, e_2, e_3, e_4 die ursprünglichen Einheiten und ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 ihre Ergänzungen, so kann man $a^{(n)}$ und $\alpha^{(n)}$ in den Formen darstellen

$$a^{(n)} = \mathfrak{a}_1 e_1^n + \mathfrak{a}_2 e_1^{n-1} e_2 + \cdots + \mathfrak{a}_\nu e_4^n,$$
$$\alpha^{(n)} = \mathfrak{b}_1 \varepsilon_1^n + \mathfrak{b}_2 \varepsilon_1^{n-1} \varepsilon_2 + \cdots + \mathfrak{b}_\nu \varepsilon_4^n.$$

Dann ergiebt sich, da $[e_r \varepsilon_r] = 1$, $[e_r \varepsilon_s] = 0$ ist, wenn r und s verschieden sind, auch $[e_1^n . \varepsilon_1^n] = [e_1 \varepsilon_1]^n = 1$, $[e_1^{n-1} e_2 . \varepsilon_1^{n-1} \varepsilon_2] = [e_1 \varepsilon_1]^{n-1} [e_2 \varepsilon_2] = 1$, und so werden überhaupt die äusseren Producte der entsprechenden Glieder gleich 1, während die der nicht entsprechenden verschwinden, also

$$[a^{(n)} \alpha^{(n)}] = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{b}_\nu$$

und dies gleich Null im Falle der Incidenz, also ganz wie bei der Incidenz eines Punktes und einer Ebene.

Da sich die Folgerungen, welche Herr *Reye* aus seiner Polarentheorie zieht, aufs leichteste aus den oben aufgestellten Principien ergeben, so glaube ich auf ihre Ableitung hier verzichten zu dürfen, und gehe jetzt auf die Systeme und Gewebe algebraischer Flächen über. Die wesentliche Idee dieser Gebilde findet sich in der Ausdehnungslehre von 1862 No. 392 und 393. Es seien f_1, f_2, ... f_ν beliebige Functionen; und zwar setze ich sie dem vorliegenden Zwecke gemäss als quaternäre Functionen von Punkten oder Ebenen im Raume, so lassen sich diese Functionen nach No. 392 als Einheiten auffassen und die daraus numerisch abgeleiteten Functionen als extensive Grössen, welche allen Verknüpfungen extensiver Grössen unterworfen werden können, und den Gesetzen derselben unterliegen. Es sei

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_\nu f_\nu$$

eine solche abgeleitete Function, x_1, x_2, ... x_ν also ihre Ableitungszahlen, die aber von den Veränderlichen, die in f_1, f_2, ... enthalten sind, gänzlich unabhängig sind. Wenn nun zwischen diesen Ableitungszahlen, die man mit Herrn *Reye* die Flächencoordinaten nennen kann, eine Gleichung m^{ten} Grades

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_\nu) = 0$$

herrscht, so habe ich die Gesammtheit der Flächen $f = 0$, die dieser Gleichung genügen, in No. 393 ein *Flächengebilde* m^{ten} Grades genannt, was

mit ***Reye*s** Darstellung wesentlich übereinstimmt. Allgemeiner würde $f = x_1 f_1 + \cdots + x_\nu f_\nu$, wenn $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ eine Gleichung m^{ten} Grades ist, ein ***Formgebilde*** m^{ten} Grades genannt werden können. Ich habe diese Idee in No. 394—400 weiter ausgeführt für den Fall, wo f_1, f_2, f_3, f_4 Kreisfunctionen in der Ebene sind, und davon ist der Fall wo $f_1, \ldots f_5$ Kugelfunctionen im Raume sind, nicht wesentlich verschieden (vergl. ***Reye*** in diesem Journal, Bd. 82, S. 7 unten). Aber in Betreff der Stufenzahl der Gebilde befinde ich mich mit Herrn ***Reye*** im Widerspruch. Ich nenne die Gesammtheit aller aus q Einheiten numerisch ableitbaren Grössen, der neueren Algebra entsprechend, ein Gebiet (lineares Gebilde) q^{ter} Stufe, während Herr ***Reye*** dafür die Stufenzahl $q-1$ annimmt, die aber überall zu verwickelteren Formeln führt. Die allgemein theoretischen Sätze, welche Herr ***Reye*** S. 1—13 in der citirten Abhandlung „Ueber Systeme u. s. w." aufstellt, werden einfacher, allgemeiner und leichter beweisbar, wenn man wie oben $f_1, \ldots f_\nu$ als beliebige Einheiten, also die f als einem Gebiete ν^{ter} Stufe angehörig auffasst. In diesem Sinne findet sich der Hauptsatz über die Stufenzahlen der Gebiete (***Reye*** a. a. O. S. 12) in No. 25 der citirten Ausdehnungslehre, wobei auf die Erklärung No. 15 zurückgegangen ist. Hier wird die Gesammtheit der Grössen, welche zweien (oder mehreren) Gebieten zugleich angehören, ihr gemeinschaftliches Gebiet und die Gesammtheit der Grössen, welche sich aus den Grössen zweier (oder mehrerer) Grössen numerisch (linear) ableiten lassen, ihr verbindendes Gebiet genannt und der Satz aufgestellt, dass die Summe der Stufenzahlen zweier Gebiete gleich der Summe der Stufenzahlen des ihnen gemeinschaftlichen und des sie verbindenden Gebietes sei. Ich verweise in Bezug auf den Beweis dieses Fundamentalsatzes auf die citirte Nummer meiner Ausdehnungslehre von 1862, und bemerke, dass er auch schon in der Ausdehnungslehre von 1844 S. 185 wenn gleich in anderer Ausdrucksweise vorkommt.

Auch die meisten der übrigen Sätze in jenem Abschnitte sind der Ausdehnungslehre zu entnehmen, dagegen findet sich in beiden Bearbeitungen der Ausdehnungslehre nicht der für die Ausdehnungslehre wichtige Satz in No. 14 jener Abhandlung. Derselbe würde für die Ausdehnungslehre so lauten: Ein Gebiet q^{ter} Stufe, welches einem Gebiete $(q+s)^{\text{ter}}$ Stufe untergeordnet sein soll, hängt von qs Parametern ab, d. h. es giebt qs-fach unendlich viele Gebiete q^{ter} Stufe, die einem gegebenen Gebiete $(q+s)^{\text{ter}}$ Stufe untergeordnet sind. Der Beweis, den Herr ***Reye*** giebt, lässt sich un-

mittelbar auf die Ausdehnungslehre übertragen. Sind nämlich wie oben $f_1, \dots f_\nu$, wo $\nu = q+s$ ist, als Einheiten gefasst, und ist $f = x_1 f_1 + \cdots + x_{q+s} f_{q+s}$, so müssen zwischen $x_1, \dots x_{q+s}$, damit f aus q Einheiten numerisch ableitbar sein soll, s Zahlbeziehungen (lineare homogene Gleichungen) herrschen. Diese lassen sich, wenn sie von einander unabhängig sind, in der Form darstellen, dass von q jener Grössen die übrigen numerisch ableitbar sind, vorausgesetzt, dass auch unendlich grosse Coefficienten gestattet sind. Jede dieser s Zahlbeziehungen enthält q Coefficienten, also alle zusammen qs Coefficienten, die man als die Parameter, von denen die untergeordneten Gebiete q^{ter} Stufe abhängen, ansehen kann.

Es ergiebt sich hieraus z. B. der für die Ausdehnungslehre sehr bedeutungsvolle Satz: Die Anzahl der Bedingungsgleichungen dafür, dass eine Grösse q^{ter} Stufe, die einem Hauptgebiete $(q+s)^{\text{ter}}$ Stufe angehört, eine einfache sei, d. h. sich als combinatorisches Product von q Grössen erster Stufe darstellen lasse (vgl. Ausdehnungslehre von 1862 No. 77, die von 1844 §. 51), ist $(q+s)^{\cdot q} - qs - 1$, d. h. $\frac{(q+s)(q+s-1)\dots(s+1)}{1.2\dots q} - qs - 1$. Also z. B. für Grössen q^{ter} Stufe in einem Gebiete $(q+1)^{\text{ter}}$ Stufe giebt es keine Bedingungsgleichung (gemäss der Ausdehnungslehre von 1862 No. 88 und der von 1844 §. 50). Aber auch jene Bedingungsgleichungen lassen sich auf dem angedeuteten Wege finden. In der That wenn

$$\begin{aligned} x_{q+1} &= y_{11} x_1 + \cdots + y_{1q} x_q \\ &\vdots \\ x_{q+s} &= y_{s1} x_1 + \cdots + y_{sq} x_q \end{aligned}$$

die oben angedeuteten Zahlbeziehungen sind, und man die Werthe von $x_{q+1}, \dots x_{q+s}$ in $f = x_1 f_1 + \cdots + x_{q+s} f_{q+s}$ einsetzt und nach den x ordnet, so erscheint f als Vielfachensumme von q Grössen, die keine der Grössen x mehr enthalten; das so bestimmte Gebiet q^{ter} Stufe, dem f angehört, wird dann dargestellt durch das combinatorische Product jener q Grössen, nämlich $= [(f_1 + y_{11} f_{q+1} + \cdots + y_{s1} f_{q+s}) \dots (f_q + y_{1q} f_{q+1} + \cdots + y_{sq} f_{q+s})]$. Als allgemeine Grösse q^{ter} Stufe erscheint sie aber in der Form $z_1 E_1 + z_2 E_2 + \cdots$, wo E_1, E_2 die Einheiten q^{ter} Stufe, d. h. (nach A. No. 77) die multiplicativen Combinationen aus den Einheiten $f_1, \dots f_{q+s}$ zur q^{ten} Klasse sind. Wir denken uns dieselben wohlgeordnet $= E_1, E_2$, so dass also $E_1 = [f_1 f_2 \dots f_q]$ ist. Setzt man nun die entsprechenden zu diesen Einheiten q^{ter} Stufe gehörigen Coefficienten auf beiden Seiten gleich, so erhält man zuerst $z_1 = 1$. Man wird

also die noch nicht homogenen Gleichungen durch Zufügung des Factors z_1 homogen machen können. Ferner ergiebt sich leicht, dass die qs unbekannten Grössen y sich unmittelbar durch je eine der Grössen z ausdrücken, so dass man die verlangten Bedingungsgleichungen zwischen den z erhält. Bezeichnet man allgemein die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung aus a Elementen zur p^{ten} Klasse mit $\overset{.p}{a}$, so ergeben sich $\overset{.2}{q}\cdot\overset{.2}{s}$ Gleichungen, deren Glieder Producte von je zwei der Grössen z, $\overset{.3}{q}\,\overset{.3}{s}$ Gleichungen, deren Glieder Producte von je drei der Grössen z, u. s. w. endlich $\overset{.q}{q}\,\overset{.q}{s} = s$ Gleichungen, deren Glieder Producte von je q der Grössen z sind. So z. B. erhält man, wenn eine Grösse zweiter Stufe in einem Gebiete vierter Stufe eine einfache Grösse (im Raume ein Linientheil) sein soll, nur Eine Bedingungsgleichung, nämlich bei der oben festgesetzten Benennung

$$z_1 z_6 - z_2 z_5 + z_3 z_4 = 0,$$

welche mit der aus der Liniengeometrie bekannten Bedingungsgleichung zusammenfällt.

Ich kehre jetzt zu den Flächengebilden zurück. Es ist gezeigt, dass die algebraischen Formen, besonders die im Raume, und die sie vertretenden algebraischen Producte von Punkten oder Ebenen als extensive Grössen aufgefasst und den Verknüpfungen dieser Grössen unterworfen werden können. Namentlich hebe ich jetzt die combinatorischen Producte derselben hervor. Unmittelbar aus dem Begriffe ergiebt sich, dass ein combinatorisches Product von m Grössen repräsentirt wird durch das aus diesen Grössen ableitbare Gebiet und einen durch die Beziehung zur Addition bedingten metrischen Werth, ferner dass jenes Product dann und nur dann Null ist, wenn die m Factoren desselben in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich sogleich die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung die durch $\nu-1$ Punkte geht, wo $\nu = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$ ist, so wie die Gleichung einer Fläche n^{ter} Klasse, die von $\nu-1$ Ebenen berührt wird. In der That sind $b_1, \ldots b_{\nu-1}$ im ersten Falle Punkte, deren n^{te} Potenzen in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so ist die Fläche n^{ter} Ordnung durch diese Punkte bestimmt und ihre Gleichung ist

$$[b_1^n . b_2^n \ldots b_{\nu-1}^n . x^n] = 0.$$

Dass sie eine Fläche n^{ter} Ordnung darstellt, zeigt ihre Form unmittelbar, dass sie die Punkte $b_1 \ldots b_{\nu-1}$ enthält, folgt sogleich; denn wird z. B. $x = b_1$, so wird auch $x^n = b_1^n$, also werden zwei der Factoren des combinatorischen

Productes gleich, also das combinatorische Product nach seinem ursprünglichen Begriffe Null. Aber diese Gleichung enthält auch die Lösung der Aufgabe in gewöhnlichen Coordinaten. Denn wenn $e_1, \ldots e_4$ vier nicht in einer Ebene liegende Punkte und

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4, \quad b_r = b_{r1} e_1 + b_{r2} e_2 + b_{r3} e_3 + b_{r4} e_4$$

für $r = 1$ bis $\nu - 1$ sind, so erhält man jede der n^{ten} Potenzen als Vielfachensumme der multiplicativen Combinationen mit Wiederholung aus e_1, e_2, e_3, e_4. Es seien $E_1, E_2, \ldots E_\nu$ diese Combinationen und zwar in wohlgeordneter Reihe, so reducirt sich die linke Seite obiger Gleichung auf eine Vielfachensumme der combinatorischen Producte von $E_1 \ldots E_\nu$ zu ν Factoren. Setzt man $[E_1 E_2 \ldots E_\nu] = 1$, so erhält man unmittelbar die verlangte Gleichung. Auch erhellt (nach Ausdehnungslehre von 1862 No. 24, von 1844 §. 20), dass man den ν Einheiten $E_1 \ldots E_\nu$ auch ν aus ihnen ableitbare Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, namentlich auch ν in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende n^{te} Potenzen von Punkten setzen und aus ihnen alle n^{ten} Potenzen von Punkten, also auch alle Flächen n^{ter} Klasse ableiten kann. Endlich kann man statt $b_1^n, \ldots b_{\nu-1}^n$ auch beliebige Flächen n^{ter} Klasse, $a_1^{(n)}, \ldots a_{\nu-1}^{(n)}$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, einsetzen und erhält dann

$$[a_1^{(n)} . a_2^{(n)} \ldots a_{\nu-1}^{(n)} x^n] = 0.$$

Es stellt also das combinatorische Product von $\nu - 1$ unabhängigen Flächen n^{ter} Klasse eine Fläche n^{ter} Ordnung dar. Diese sei $\alpha^{(n)}$, also

$$[a_1^{(n)} . a_2^{(n)} \ldots a_{\nu-1}^{(n)}] = \alpha^{(n)},$$

so wird

$$[\alpha^{(n)} x^n] = 0$$

die Gleichung dieser Fläche. In dieser kann man wieder statt x^n eine Fläche n^{ter} Klasse $a^{(n)}$ setzen und erhält

$$[a_1^{(n)} . a_2^{(n)} \ldots a_{\nu-1}^{(n)} a^{(n)}] = [\alpha^{(n)} a^{(n)}] \quad \text{und dies} \quad = 0,$$

wenn $\alpha^{(n)}$ und $a^{(n)}$ incident sind (vergl. *Reye* Ueber Systeme u. s. w. No. 21). Es mag an diesen Andeutungen genügen, um die Fruchtbarkeit der in der Ausdehnungslehre entwickelten Methoden auch für das von Herrn *Reye* neu eröffnete Forschungsgebiet nachzuweisen.

Stettin, den 28. Juli 1877.

Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Königsberger* in Wien.)

Sei Z ein Integral der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(1.)\qquad f\left(x,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0,$$

in welcher das Zeichen f eine ganze Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeuten soll, so wird es sich im Folgenden darum handeln, Methoden zur Feststellung der allgemeinen Form einer algebraischen Beziehung

$$(2.)\qquad F(x,\ Z,\ Z_1,\ Z_2,\ \ldots\ Z_\nu) = 0$$

anzugeben, welche möglicherweise zwischen dem Integrale Z und einer Reihe von ν andern Integralen

$$Z_1,\quad Z_2,\quad \ldots\quad Z_\nu$$

der resp. Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(3.)\quad \begin{cases} \left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{\varkappa_1} + \varphi_1(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{\varkappa_1-1} + \cdots + \varphi_{\varkappa_1-1}(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu)\frac{dz_1}{dx} + \varphi_{\varkappa_1}(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu) = 0, \\ \left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{\varkappa_2} + \psi_1(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu)\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{\varkappa_2-1} + \cdots + \psi_{\varkappa_2-1}(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu)\frac{dz_2}{dx} + \psi_{\varkappa_2}(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\frac{dz_\nu}{dx}\right)^{\varkappa_\nu} + \chi_1(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu)\left(\frac{dz_\nu}{dx}\right)^{\varkappa_\nu-1} + \cdots + \chi_{\varkappa_\nu-1}(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu)\frac{dz_\nu}{dx} + \chi_{\varkappa_\nu}(x, z_1, z_2, \ldots z_\nu) = 0 \end{cases}$$

stattfindet, in welchen die Functionen

$$\varphi_\alpha(x,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_\nu),\quad \psi_\alpha(x,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_\nu),\quad \ldots\quad \chi_\alpha(x,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_\nu)$$

rationale Functionen der Grössen $x,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_\nu$ bedeuten; vorausgesetzt wird, dass die Differentialgleichungen (3.) irreductibel sind, und dass ferner die Grössen $Z_1,\ Z_2,\ \ldots\ Z_\nu$ weder selbst algebraische Functionen von x sind noch zwischen diesen Grössen eine algebraische Beziehung besteht, weil man sonst mit Hülfe einer solchen Relation eine der Z_α-Grössen aus der Gleichung (2.) herausschaffen könnte und dann nur diese neue algebraische Beziehung der folgenden Untersuchung zu Grunde zu legen hätte.

Differentiirt man die Gleichung (2.) m-mal nach einander, so dass sich die Gleichungen ergeben

$$(4.)\qquad \frac{dF}{dx}=0,\quad \frac{d^2F}{dx^2}=0,\quad \dots\quad \frac{d^mF}{dx^m}=0,$$

welche aus den Grössen $Z, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ und deren Differentialquotienten nach x bis zur m^{ten} Ordnung genommen algebraisch zusammengesetzt sind, so wird man die $m+1$ Grössen

$$Z,\ \frac{dZ}{dx},\ \frac{d^2Z}{dx^2},\ \dots\ \frac{d^mZ}{dx^m}$$

aus den $m+2$ Gleichungen (1.), (2.) und (4.) eliminiren können und eine Differentialgleichung

$$(5.)\qquad H\left(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu, \frac{dZ_1}{dx}, \dots \frac{dZ_\nu}{dx}, \dots \frac{d^mZ_1}{dx^m}, \dots \frac{d^mZ_\nu}{dx^m}\right) = 0$$

erhalten, worin H eine ganze Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet; und dieses in rationaler Form hergestellte Eliminationsresultat wird auch ersetzt werden können durch dasjenige, welches man erhält, wenn man vermittels Auflösung der Gleichung (2.) nach Z, in Bezug auf welche Variable sie vom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade sein mag,

$$(6.)\qquad \begin{cases} Z = \omega_1(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \\ Z = \omega_2(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \quad \dots \quad Z = \omega_\varkappa(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu) \end{cases}$$

ermittelt, der Reihe nach die Grössen

$$\begin{array}{lll} \dfrac{dZ}{dx} = \dfrac{d\omega_1(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx}, & \dfrac{d^2Z}{dx^2} = \dfrac{d^2\omega_1(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^2}, \quad \dots & \dfrac{d^mZ}{dx^m} = \dfrac{d^m\omega_1(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^m} \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \dfrac{dZ}{dx} = \dfrac{d\omega_\varkappa(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx}, & \dots & \dfrac{d^mZ}{dx^m} = \dfrac{d^m\omega_\varkappa(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^m} \end{array}$$

bildet und in die Gleichung (1.) einsetzt, woraus als zweite Form des Eliminationsresultates

$$(7.)\qquad \begin{cases} f\left(x, \omega_1(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \dfrac{d\omega_1(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx}, \dots \dfrac{d^m\omega_1(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^m}\right) \times \\ f\left(x, \omega_2(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \dfrac{d\omega_2(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx}, \dots \dfrac{d^m\omega_2(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^m}\right) \times \\ \dots\dots \\ f\left(x, \omega_\varkappa(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \dfrac{d\omega_\varkappa(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx}, \dots \dfrac{d^m\omega_\varkappa(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^m}\right) = 0 \end{cases}$$

folgt.

Denkt man sich nun aus den ν Gleichungen (3.), wenn in dieselben $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ statt $z_1, z_2, \dots z_\nu$ gesetzt ist, den $\nu(m-1)$ Gleichungen, welche aus diesen durch $(m-1)$-malige successive Differentiation nach x entstehen, und der Gleichung (5.) die νm Grössen

$$\frac{dZ_1}{dx}, \frac{dZ_2}{dx}, \dots \frac{dZ_\nu}{dx}, \frac{d^2Z_1}{dx^2}, \dots \frac{d^2Z_\nu}{dx^2}, \dots \frac{d^mZ_1}{dx^m}, \dots \frac{d^mZ_\nu}{dx^m}$$

eliminirt, so wird sich eine algebraische Beziehung von der Form

$$(8.)\qquad K(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu) = 0$$

zwischen den Grössen $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ ergeben, welche der oben gemachten Voraussetzung gemäss nicht bestehen darf, und es wird somit das Eliminationsresultat (8.) für alle beliebigen Werthe der Grössen $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ erfüllt sein müssen. Aber auch diese eben ausgeführte Elimination und daher die in den Grössen $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ identische Gleichung kann anders dargestellt werden; berechnet man nämlich aus den Differentialgleichungen (2.) die Werthe

$$(9.)\begin{cases} \frac{dZ_1}{dx} = h_{11}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \ \frac{dZ_1}{dx} = h_{12}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \dots \ \frac{dZ_1}{dx} = h_{1\varkappa_1}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \\ \frac{dZ_2}{dx} = h_{21}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \ \frac{dZ_2}{dx} = h_{22}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \dots \ \frac{dZ_2}{dx} = h_{2\varkappa_2}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dZ_\nu}{dx} = h_{\nu 1}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \ \frac{dZ_\nu}{dx} = h_{\nu 2}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \dots \ \frac{dZ_\nu}{dx} = h_{\nu\varkappa_\nu}(x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu), \end{cases}$$

hieraus durch successive Differentiation der einzelnen Gleichungen die verschiedenen Werthe für

$$\begin{matrix} \frac{d^2Z_1}{dx^2}, & \frac{d^2Z_2}{dx^2}, & \dots & \frac{d^2Z_\nu}{dx^2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^mZ_1}{dx^m}, & \frac{d^mZ_2}{dx^m}, & \dots & \frac{d^mZ_\nu}{dx^m}, \end{matrix}$$

welche aus allen den Werthecombinationen der ersten Differentialquotienten zusammenzusetzen sind, und setzt diese Werthe in allen ihren Verbindungen in (5.) ein, so folgt, dass

$$(10.)\begin{cases} \prod_{\alpha,\beta,\dots\varrho} H\Big\{x, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu, h_{1\alpha}(x, Z_1, \dots Z_\nu), \dots h_{\nu\varrho}(x, Z_1, \dots Z_\nu), \\ \frac{dh_{1\alpha}(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx}, \dots \frac{dh_{\nu\varrho}(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx}, \dots \frac{d^{m-1}h_{1\alpha}(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^{m-1}}, \dots \frac{d^{m-1}h_{\nu\varrho}(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^{m-1}}\Big\} = 0 \end{cases}$$

für alle beliebigen Werthe von $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ identisch befriedigt, oder dass in Folge der oben vorausgesetzten Irreductibilität der Differentialgleichungen (3.) für eine beliebige Werthecombination von $\alpha, \beta, \dots \varrho$

$$(11.)\quad \begin{cases} H\Big\{x,\ Z_1, \dots Z_\nu,\ h_{1\alpha}(x, Z_1, \dots Z_\nu), \dots h_{\nu\varrho}(x, Z_1, \dots Z_\nu), \dots \\ \qquad \dfrac{d^{m-1}h_{1\alpha}(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^{m-1}}, \dots \dfrac{d^{m-1}h_{\nu\varrho}(x, Z_1, \dots Z_\nu)}{dx^{m-1}}\Big\} = 0 \end{cases}$$

erfüllt sein muss, wenn statt $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ beliebige andere Grössen gesetzt werden, oder dass endlich die Gleichung (5.) ebenfalls bestehen bleibt, wenn man statt $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ beliebige andere Integrale $Z_1', Z_2', \dots Z_\nu'$ der Differentialgleichungen (3.) substituirt. Da aber die Gleichung (5.) nur eine andere Form des Eliminationsresultates als die durch (7.) dargestellte angiebt, so wird also auch die Beziehung bestehen

$$(12.)\quad \begin{cases} f\Big(x, \omega_1(x, Z_1', \dots Z_\nu'), \dfrac{d\omega_1(x, Z_1', \dots Z_\nu')}{dx}, \dots \dfrac{d^m\omega_1(x, Z_1', \dots Z_\nu')}{dx^m}\Big) \times \\ f\Big(x, \omega_2(x, Z_1', \dots Z_\nu'), \dfrac{d\omega_2(x, Z_1', \dots Z_\nu')}{dx}, \dots \dfrac{d^m\omega_2(x, Z_1', \dots Z_\nu')}{dx^m}\Big) \times \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f\Big(x, \omega_\varkappa(x, Z_1', \dots Z_\nu'), \dfrac{d\omega_\varkappa(x, Z_1', \dots Z_\nu')}{dx}, \dots \dfrac{d^m\omega_\varkappa(x, Z_1', \dots Z_\nu')}{dx^m}\Big) = 0, \end{cases}$$

welche wiederum nichts anderes aussagt, als dass die Gleichung (1.) auch die durch den Ausdruck

$$(13.)\qquad Z' = \omega_\alpha(x,\ Z_1',\ Z_2',\ \dots\ Z_\nu')$$

definirte Function zum Integral hat, wenn α einen der Indices $1, 2, \dots \varkappa$ bedeutet. Da sich aber aus (13.) der Gleichung (2.) gemäss

$$(14.)\qquad F(x,\ Z',\ Z_1',\ Z_2',\ \dots\ Z_\nu') = 0$$

ergiebt, so folgt,

dass, wenn zwischen den Integralen

$$Z,\ Z_1,\ Z_2,\ \dots\ Z_\nu$$

der Differentialgleichungen (1.) *und* (3.) *ein algebraischer Zusammenhang* (2.) *stattfindet, und man setzt statt der Grössen* $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ ν *beliebige andere Integrale des als irreductibel vorausgesetzten Systems von Differentialgleichungen* (3.), *so wird die algebraische Beziehung* (2.) *noch fortbestehen, wenn für* Z *ein bestimmtes anderes Integral* Z' *der Differentialgleichung* (1.) *gesetzt wird.*

Von diesem Satze wird man in vielen Fällen zur Feststellung der Form jener algebraischen Beziehung Gebrauch machen können. Drückt

man nämlich andere Integrale des Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung (3.) durch die in der algebraischen Beziehung (2.) vorkommenden Integrale $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ und eine Reihe von willkürlichen Grössen $m_1, m_2, \dots$ aus, so wird nach dem oben bewiesenen Satze die algebraische Relation (2.) noch erfüllt sein müssen, wenn für $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ die eben bezeichneten Werthe von $z_1, z_2, \dots z_\nu$ für eine beliebige Wahl der Grössen $m_1, m_2, \dots$ gesetzt werden, und wenn zugleich für Z ein anderes Integral der Differentialgleichung (1.) substituirt wird; bemerkt man nun, dass, wenn man die Form dieses Integrales von (1.) durch Z und willkürliche Grössen auszudrücken im Stande ist, diese letzteren in jedem Falle bestimmte Functionen der willkürlichen Grössen $m_1, m_2, \dots$ sein werden, so sieht man leicht ein, dass sich eine Functionalgleichung mit den willkürlichen Grössen $m_1, m_2, \dots$ und den variablen Grössen $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$, welche jedes System particulärer Integrale vorstellen dürfen, ergeben kann, aus der zu entwickeln sein wird, in welcher Weise die Grössen $Z, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ in die algebraische Beziehung eintreten.

Stellen wir uns, um einige Anwendungen von dieser Methode zu machen, zunächst die Aufgabe, die nothwendige Form der algebraischen Beziehung zu bestimmen, welche zwischen dem Integrale Z der Differentialgleichung

$$f\left(x, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

in welcher f eine rationale Function bedeutet, und den Integralen

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \dots \quad Z_\nu$$

der resp. Differentialgleichungen

$$f_1\left(x, \frac{dz_1}{dx}\right) = 0, \quad f_2\left(x, \frac{dz_2}{dx}\right) = 0, \quad \dots \quad f_\nu\left(x, \frac{dz_\nu}{dx}\right) = 0$$

stattfindet, wenn wiederum $f_1, f_2, \dots f_\nu$ rationale Functionen vorstellen.

Sei diese Beziehung

$$F(x, Z, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu) = 0,$$

so wird dieselbe nach dem obigen Satze noch bestehen bleiben, wenn

$$Z_1 + m_1, \quad Z_2 + m_2, \quad \dots \quad Z_\nu + m_\nu$$

statt $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ gesetzt werden, wenn nur statt Z ein anderes Integral des zugehörigen irreductibeln Factors der obigen Differentialgleichung, also ein Integral der Form

$$Z + m$$

gesetzt wird, worin m eine von den willkürlichen Grössen $m_1, m_2, \dots m_\nu$ abhängige Constante sein wird; und diese Beziehung

$$F(x, Z+m, Z_1+m_1, Z_2+m_2, \dots Z_\nu+m_\nu) = 0$$

wird für alle $m_1, \dots m_\nu$ und alle $Z_1, \dots Z_\nu$ stattfinden müssen.

Nun folgt aber unmittelbar durch Differentiiren dieser letzteren Beziehung nach $Z_\varkappa$ und $m_\varkappa$, worin $\varkappa$ einen der Indices $1, 2, \dots \nu$ vorstellt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial (Z+m)}\frac{\partial Z}{\partial Z_\varkappa}+\frac{\partial F}{\partial Z_\varkappa} = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial (Z+m)}\frac{\partial m}{\partial m_\varkappa}+\frac{\partial F}{\partial m_\varkappa} = 0,$$

also

$$\frac{\partial Z}{\partial Z_\varkappa} = \frac{\partial m}{\partial m_\varkappa}$$

ist und daher

$$\frac{\partial Z}{\partial Z_\varkappa} = a_\varkappa,$$

worin $a_\varkappa$ eine Constante bedeutet. Es ergiebt sich daraus unmittelbar, dass

$$Z = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \dots + a_\nu Z_\nu + b,$$

worin b eine algebraische Function von x bedeutet, und es hat somit, wenn

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \quad \dots \quad y_\nu$$

algebraische Functionen von x bezeichnen, die allgemeinste Beziehung zwischen *Abel*schen Integralen die Form

$$A\int y\,dx + A_1\int y_1\,dx + \dots + A_\nu\int y_\nu\,dx + B = 0,$$

worin $A, A_1, \dots A_\nu$ Constanten und B eine algebraische Function von x bedeutet, eine Gleichung, von der ich bei der Untersuchung der allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen verschiedener Ordnungen ausging und die ich der Reduction des allgemeinen Transformationsproblems auf das rationale zu Grunde legte*).

Es soll ferner noch untersucht werden, ob eine algebraische Be-

---

*) Dieses Journal Bd. 81, S. 193.

ziehung zwischen *Abel*schen Integralen etwa noch die eindeutigen Umkehrungsfunctionen solcher Integrale, wie die Exponentialfunctionen, die trigonometrischen Functionen, die elliptischen Functionen etc. enthalten kann.

Angenommen es wäre in jener algebraischen Beziehung auch noch die transcendente Function

$$\zeta = e^v$$

enthalten, in welcher v eine algebraische Function von x bedeutet, und welche somit der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = z\frac{dv}{dx}$$

genügt, die vermöge der algebraischen Gleichung in v, x, z und $\frac{dz}{dx}$ durch eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (3.) verbindet, so wird die algebraische Beziehung

$$F(x, Z, \zeta, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu) = 0,$$

weil jedem particulären Werthe ζ ein anderer Werth $\mu\zeta$ entspricht, worin μ eine willkürliche Constante bedeutet, die Functionalgleichung

$$F(x, Z+m, \mu\zeta, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu) = 0$$

liefern, welche durch successives Differentiiren nach ζ und μ die beiden Gleichungen liefert

$$\frac{\partial F}{\partial(Z+m)}\frac{\partial Z}{\partial\zeta}+\mu\frac{\partial F}{\partial\mu\zeta} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial(Z+m)}\frac{\partial m}{\partial\mu}+\zeta\frac{\partial F}{\partial\mu\zeta} = 0.$$

Da hieraus

$$\zeta\frac{\partial Z}{\partial\zeta} = \mu\frac{\partial m}{\partial\mu}$$

folgt, so wird

$$Z = P\log\zeta+Q$$

sein, worin P eine Constante und Q eine von ζ unabhängige Grösse bedeutet, oder

$$Z = Pv+Q,$$

woraus folgt, dass e^v in jener algebraischen Beziehung gar nicht vorkommen

kann; wie Q aus $Z_1, Z_2, \dots Z_\nu$ zusammengesetzt sein muss, ist oben gezeigt worden.

Endlich mag noch die Frage aufgeworfen werden, ob in jener algebraischen Relation zwischen *Abel*schen Integralen etwa noch eine elliptische Function von der Form

$$\eta = \sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$$

enthalten sein kann, in welcher u eine algebraische Function von x bedeutet. Da diese Function der Differentialgleichung genügt

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}\,\frac{du}{dx},$$

welche wieder mit Hülfe der algebraischen Gleichung zwischen u und x in eine algebraische Differentialgleichung zwischen y und x transformirbar ist, ferner zu jedem particulären Integrale

$$\eta = \sin\operatorname{am}(u+\alpha),$$

in welchem α eine Constante bedeutet, ein anderes Integral

$$H = \sin\operatorname{am}(u+c) = \sin\operatorname{am}(u+\alpha+c-\alpha)$$

gehört, worin c eine willkürliche Constante ist, also, wenn

$$\sin\operatorname{am}(c-\alpha) = \mu$$

gesetzt wird,

$$H = \frac{\eta\sqrt{(1-\mu^2)(1-\varkappa^2\mu^2)}+\mu\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}}{1-\varkappa^2\eta^2\mu^2}$$

stets ebenfalls ein Integral für jeden beliebigen Werth von μ ist, so wird die Functionalbeziehung

$$F(x, Z, \eta, Z_1, Z_2, \dots Z_\nu) = 0$$

nach dem schon mehrfach benutzten Satze die algebraische Beziehung

$$F\left(x, Z+m, \frac{\eta\sqrt{(1-\mu^2)(1-\varkappa^2\mu^2)}+\mu\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}}{1-\varkappa^2\eta^2\mu^2}, Z_1, \dots Z_\nu\right) = 0$$

nach sich ziehen. Die successive Differentiation nach η und μ liefert die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial(Z+m)}\frac{\partial Z}{\partial\eta}+\frac{\partial F}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial(Z+m)}\frac{\partial m}{\partial\mu}+\frac{\partial F}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial\mu} = 0$$

und daher

$$\frac{\frac{\partial Z}{\partial \eta}}{\frac{\partial H}{\partial \eta}} = \frac{\frac{\partial m}{\partial \mu}}{\frac{\partial H}{\partial \mu}};$$

setzt man aber

$$\eta = \sin\operatorname{am} v, \quad \mu = \sin\operatorname{am} w,$$

so folgt

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial \sin\operatorname{am}(v+w)}{\partial \sin\operatorname{am} v} = \frac{\partial \sin\operatorname{am}(v+w)}{\partial v} : \frac{\partial \sin\operatorname{am} v}{\partial v}$$
$$= \frac{\partial \sin\operatorname{am}(v+w)}{\partial v} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}},$$

und ebenso

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = \frac{\partial \sin\operatorname{am}(v+w)}{\partial w} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\varkappa^2\mu^2)}},$$

so dass die letzte oben erhaltene Gleichung die Form annimmt

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta}\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)} = \frac{\partial m}{\partial \mu}\sqrt{(1-\mu^2)(1-\varkappa^2\mu^2)},$$

und daher

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \frac{g}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}}$$

wird, worin g eine Constante bedeutet. Es ergiebt sich daraus unmittelbar, dass

$$Z = g\int \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}} + h = gu + h$$

ist, worin h von η unabhängig, und dass somit die elliptische Umkehrungsfunction in jener algebraischen Verbindungsgleichung zwischen *Abel*schen Integralen nicht vorkommen kann. Es bedarf keiner weiteren Erläuterung, wie genau ebenso gefolgert wird, dass überhaupt eindeutige *Abel*sche Functionen, deren Argumente algebraische Functionen der Variablen x sind, in einer algebraischen Verbindung mit *Abel*schen Integralen nicht vorkommen können, Folgerungen, die sich auch auf Grund wesentlich anderer Betrachtungen aus der Vieldeutigkeit der Integrale ableiten lassen.

Die obigen Untersuchungen gestatten eine weitere Ausdehnung auf transcendente Beziehungen zwischen Integralen von Differentialgleichungen und eine Eintheilung der transcendenten Functionen selbst, auf die ich jedoch an dieser Stelle nicht eingehe.

Es mag am Schlusse dieser Notiz noch bemerkt werden, dass die bekannten Sätze von *Liouville* über die Form der Beziehungen, welche zwischen einem Integrale

$$\int y\,dx,$$

worin y eine algebraische Function von x bedeutet, algebraischen-, logarithmischen- und Exponentialfunctionen bestehen, unmittelbar und zwar nur mit Hülfe des oben bewiesenen Satzes über den algebraischen Zusammenhang von Integralen von Differentialgleichungen und der zur Erkennung dieses Zusammenhanges aus jenem Satze fliessenden Methode hergeleitet werden können.

Wien, im Juni 1877.

Extrait d'une lettre, concernant l'application des intégrales abéliennes à la géometrie des courbes planes, adressée à M. *Hermite* par M. *Lindemann*.

... Je me suis beaucoup occupé de vos recherches sur les courbes planes du genre $p = 1$ qui se trouvent exposées dans votre mémoire inséré au tome 82 du journal de M. *Borchardt*. J'ai fini par généraliser vos résultats, en appliquant la même méthode aux courbes d'un genre quelconque. Vous me permettrez, Monsieur, de vous expliquer, en peu de mots, la voie qui m'y a conduit.

Vous faites usage, dans votre mémoire, d'un théorème suivant lequel chaque fonction doublement périodique de x se représente sous la forme d'une somme de plusieurs intégrales $Z(x)$ de seconde espèce. De même, je prends pour point de départ un théorème, dû à *Roch*, relatif aux intégrales abéliennes de seconde espèce. Je suppose que les coordonnées x et y d'un point satisfont toujours à une équation algébrique $f(x, y) = 0$, équation d'une courbe d'ordre n et de genre p. Alors chaque fonction algébrique de x et y qui devient infinie en m points de la courbe $f = 0$ est égale à une somme de m intégrales abéliennes de seconde espèce, attachées de la manière connue à la courbe proposée de genre p; les pôles de ces intégrales sont respectivement les infinis mêmes de la fonction algébrique en question. Cette dernière étant désignée par λ et l'intégrale normale de seconde espèce dont le pôle se trouve au point x_i, y_i de $f = 0$, par Z_i, on a d'après la proposition de *Roch**):

$$\lambda = \lambda_0 + A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \cdots + A_m Z_m$$

où les constantes $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont essentiellement assujetties à remplir les p conditions

$$\begin{aligned} A_1\psi_1(x_1, y_1) + A_2\psi_1(x_2, y_2) + \cdots + A_m\psi_1(x_m, y_m) &= 0, \\ A_1\psi_2(x_1, y_1) + A_2\psi_2(x_2, y_2) + \cdots + A_m\psi_2(x_m, y_m) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1\psi_p(x_1, y_1) + A_2\psi_p(x_2, y_2) + \cdots + A_m\psi_p(x_m, y_m) &= 0. \end{aligned}$$

---

*) Voyez, par exemple, mon édition des leçons de *Clebsch*, t. 1, p. 863.

Dans ces relations j'ai posé, pour abréger,

$$\psi_1(x, y) = \frac{\varphi_1(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad \psi_2(x, y) = \frac{\varphi_2(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad \ldots$$

les équations

$$\varphi_1(x, y) = 0, \quad \varphi_2(x, y) = 0, \quad \ldots \quad \varphi_p(x, y) = 0$$

représentant les p courbes d'ordre $n-3$ qui passent par tous les d points doubles de la courbe $f = 0$, de façon que les p intégrales normales de première espèce soient données par

$$u_1 = \int \frac{\varphi_1(x, y)\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad \ldots \quad u_p = \int \frac{\varphi_p(x, y)\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Cela posé, j'envisage les deux fonctions algébriques de x et y que voici

$$(1.) \quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \cdots + A_m Z_m, \\ \eta = \eta_0 + B_1 Z_1 + B_2 Z_2 + \cdots + B_m Z_m \end{cases}$$

dont les constantes A_i, B_i doivent satisfaire aux $2p$ équations

$$\begin{aligned} A_1 \psi_h(x_1, y_1) + \cdots + A_m \psi_h(x_m, y_m) &= 0, \\ B_1 \psi_h(x_1, y_1) + \cdots + B_m \psi_h(x_m, y_m) &= 0, \end{aligned} \quad h = 1, 2, \ldots p.$$

Les deux quantités ξ et η satisfont évidemment à une équation algébrique $F(\xi, \eta) = 0$ de l'ordre m. Effectivement, chaque équation linéaire

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$$

est satisfaite par m systèmes de valeurs de ξ, η, son premier membre étant une fonction algébrique de x et y qui a m infinis, à savoir les m points x_i, y_i. En vertu des relations (1.), la courbe $f(x, y) = 0$ d'ordre n se trouve donc transformée, par une substitution uniforme, en la courbe $F(\xi, \eta) = 0$ d'ordre m. Je vais démontrer que *ces deux courbes sont du même genre p*.

A cet effet, il s'agit de déterminer le nombre des points doubles de la courbe $F = 0$. J'y arrive par une voie indirecte, en déterminant d'abord la classe de la courbe $F = 0$, c'est-à-dire le degré de sa polaire, comme vous l'avez fait pour le cas $p = 1$.

Les coordonnées des points de cette polaire sont

$$\Xi = \frac{-\eta'}{\xi\eta' - \eta\xi'}, \quad H = \frac{\xi'}{\xi\eta' - \eta\xi'}.$$

Son degré se trouve donc égal au nombre des points x, y de $f(x, y) = 0$

qui satisfont à la condition

$$(2.)\qquad -\alpha\eta'+\beta\xi'+\gamma(\xi\eta'-\eta\xi') = 0.$$

Or je peux faire

$$Z_i = \int \frac{\Omega_{n-2}^{(i)}(x,y)\,dx}{(u_i x+v_i y+1)\frac{\partial f}{\partial y}},$$

en supposant que la droite

$$(3.)\qquad u_i x+v_i y+1 = 0$$

touche la courbe $f=0$ au point x_i, y_i et que $\Omega_{n-2}^{(i)}=0$ soit l'équation d'une courbe d'ordre $n-2$ qui passe par les d points doubles de $f=0$ et, en outre, par les $n-2$ intersections simples de la droite (3.) avec la courbe $f=0$. En prenant x comme variable indépendante, on peut donc poser

$$Z_i' = \frac{\Omega_{n-2}^{(i)}(x,y)}{(u_i x+v_i y+1)\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\Omega_{n-2}^{(i)}(x,y)}{(u_i x+v_i y+1)\varphi(x,y)}J',$$

J' étant la dérivée d'une intégrale quelconque de première espèce, savoir

$$J = \int \frac{\varphi(x,y)\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Maintenant j'ai les relations

$$\xi' = J'\Big(A_1\frac{Z_1'}{J'}+A_2\frac{Z_2'}{J'}+\cdots+A_m\frac{Z_m'}{J'}\Big),$$

$$\eta' = J'\Big(B_1\frac{Z_1'}{J'}+B_2\frac{Z_2'}{J'}+\cdots+B_m\frac{Z_m'}{J'}\Big).$$

Or le quotient $Z_i':J'$ a $2p$ infinis situés sur la courbe $f=0$, dont $2p-2$ sont les intersections simples de la courbe $\varphi=0$ avec $f=0$, tandis que les 2 autres se confondent avec le point x_i, y_i. De même, ce quotient a $2p$ zéros, à savoir les

$$n(n-2)-(n-2)-2d = 2p$$

intersections simples de la courbe $\Omega_{n-2}^{(i)}=0$ avec $f=0$, qu'il y a en outre des $n-2$ autres intersections simples de ces deux courbes par lesquelles passe en même temps la droite (3.).

En négligeant le facteur J' du premier membre de l'équation (2.), ce membre devient donc infini pour $2m+2p-2$ points de $f=0$, car la fonction Z_i' est infinie du second ordre pour le pôle de l'intégrale Z_i, et, dans l'expression $\xi\eta'-\eta\xi'$, chaque fonction Z_i' ne se trouve multipliée que

par des intégrales Z_k dont les indices sont différents de i. Par conséquent, les zéros de ce premier membre sont en même nombre. Ainsi la classe k de la courbe $F=0$ se trouve déterminée par

$$k = 2m+2p-2.$$

D'autre part, on a d'après les formules de *Plücker:*

$$k = 2m+2\pi-2,$$

en désignant par π le genre de la courbe $F=0$. Il en résulte que $\pi=p$. Notre démonstration est donc complète.

Würzburg, 2 juillet 1877.

Extrait d'une lettre de M. *Hermite* à M. *Lindemann.*

... Les formules que je crois d'une grande importance, par lesquelles vous représentez les coordonnées d'une courbe d'ordre m et de genre p, renferment-elles le nombre maximum de constantes arbitraires qu'elles comportent, c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)-[\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)-p] = 3m-1+p?$$

Pour $p=0$, les expressions des coordonnées étant:

$$\xi = \frac{B}{A}, \quad \eta = \frac{C}{A},$$

où A, B, C représentent des polynômes du $m^{\text{ième}}$ degré en t, on peut d'abord, si l'on remplace cette variable par la fonction linéaire $\frac{\alpha+\beta t}{1+\gamma t}$, diminuer de trois unités, en disposant de α, β, γ, le nombre des constantes que contiennent ces formules. On peut encore dans les résultats de cette substitution:

$$\xi = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$$

supposer égal à l'unité le coefficient de la puissance la plus élevée de t, dans le dénominateur $\mathfrak{A}$, par exemple; et ainsi le nombre des arbitraires se réduit à

$$2(m+1)+m-3 = 3m-1.$$

Pour $p=1$, les formules

$$\xi = \xi_0+A_1Z(t-t_1)+A_2Z(t-t_2)+\cdots+A_m Z(t-t_m),$$
$$\eta = \eta_0+B_1Z(t-t_1)+B_2 Z(t-t_2)+\cdots+B_m Z(t-t_m)$$

mettent en évidence, d'une part les résidus, A_1, $A_2\ldots$; B_1, $B_2\ldots$ c'est-à-dire $2(m-1)$ constantes, à cause des conditions $\Sigma A=0$, $\Sigma B=0$, puis les quantités t_1, t_2, ... t_m qu'il faut réduire à $m-1$ arbitraires, puisqu'on peut remplacer t, par $t+t_1$, par exemple. Si l'on ajoute à ces constantes le module ainsi que ξ_0 et η_0, on trouve bien en définitive le nombre $3m$.

Après avoir appelé votre attention sur ce point, permettez-moi de vous dire, de quelle manière j'exprime qu'une courbe $f(x,y)=0$ admet δ points doubles. Je considère à cet effet les relations

$$u=f(x,y), \quad \frac{df}{dx}=0, \quad \frac{df}{dy}=0,$$

et j'observe que le résultat de l'élimination de x et y sera une équation en u: $\Pi(u) = 0$ dont les racines représenteront les diverses valeurs que prend $f(x, y)$, quand on y remplace x et y, par les solutions des équations: $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$. Par conséquent le nombre des points doubles est donné par le nombre des racines u qui sont égales à zéro. Ceci posé, nommons $a, b, c, \ldots k$ les coefficients de $f(x, y)$ et supposons que le terme indépendant des variables soit k. Il est évident que l'équation $\Pi(u) = 0$ se formera au moyen du discriminant relatif à l'équation proposée, en y remplaçant k par $k-u$, de sorte qu'en représentant ce discriminant par $\Pi(a, b, c, \ldots k)$, on aura

$$\Pi(u) = \Pi(a, b, c, \ldots k-u).$$

Les conditions pour que la courbe $f(x, y) = 0$ possède δ points doubles, peuvent donc s'obtenir au moyen du discriminant, sous la forme suivante:

$$\Pi = 0, \quad \frac{d\Pi}{dk} = 0, \quad \frac{d^2\Pi}{dk^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{\delta-1}\Pi}{dk^{\delta-1}} = 0.$$

Paris, 13 juillet, 1877.

Extrait d'une seconde lettre, concernant l'application des intégrales abéliennes à la géométrie des courbes planes, adressée à M. *Hermite* par M. *Lindemann*.

... Vos beaux résultats au sujet des conditions pour qu'une courbe plane ait plusieurs points doubles m'ont extrêmement intéressé. J'ai essayé d'appliquer votre ingénieuse méthode aux cubiques planes; j'obtiens, je crois, sans difficulté les mêmes résultats que l'on doit, à leur égard, à M. *Gundelfinger*. Cet exemple m'a fait remarquer que vos équations

$$\Pi = 0, \quad \frac{d\Pi}{dk} = 0, \quad \dots \quad \frac{d^{\delta-1}\Pi}{dk^{\delta-1}} = 0,$$

renferment, en même temps, les conditions pour l'existence de δ points doubles et pour l'existence d'autres singularités plus compliquées. Ainsi, l'équation $\frac{d\Pi}{dk} = 0$ doit être satisfaite, ou bien si la courbe $f = 0$ a deux points doubles, ou bien si elle a un point de rebroussement. En effet, quand on remplace la droite à l'infini par une droite quelconque

$$v_x = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0,$$

on a l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3) - u . v_x^n = 0 \quad \text{au lieu de} \quad f(x, y) = u.$$

Supposons que $f = 0$ soit une cubique plane. Son discriminant est $\Pi = S^3 - 6T^2$; au lieu de l'équation $\frac{d\Pi}{dk} = 0$, il faut considérer la suivante

$$\sum_{i,k,h} \frac{\partial \Pi}{\partial a_{ikh}} v_i v_k v_h = 0$$

en posant

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{ikh} x_i x_k x_h.$$

Or on a (v. les leçons de *Clebsch*, p. 547, formule (14.) et p. 556, formule (30.))

$$\Sigma \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}} v_i v_k v_h = 4\Sigma, \quad \Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} v_i v_k v_h = 6\mathrm{T}.$$

Par conséquent, la cubique a deux points doubles, si l'on a, quelle que soit la droite $v_x = 0$,

$$S^2 \Sigma - 6 T \mathrm{T} = 0$$

ou bien, eu égard à l'équation $S^3 = 6T^2$,

$$ST - T\Sigma = 0,$$

comme il est énoncé par M. *Gundelfinger*. Or, cette relation est aussi satisfaite, si $S = 0$ et $T = 0$, c'est-à-dire, si la courbe $f = 0$ a un point de rebroussement. —

Vous avez bien voulu appeler mon attention sur la question du nombre maximum des constantes arbitraires d'une courbe $F(\xi, \eta) = 0$ dont les points sont représentés par

$$\xi = \xi_0 + A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \cdots + A_m Z_m,$$
$$\eta = \eta_0 + B_1 Z_1 + B_2 Z_2 + \cdots + B_m Z_m.$$

Cette question se résout, je crois, quand on suppose connu ce théorème que le nombre des modules de la courbe $f = 0$, dont dépendent les intégrales Z_i, est égal à $3p - 3$, p étant le genre de $f = 0$. En effet, d'après le théorème de *Roch*, j'ai $2p$ relations entre les quantités A_i et B_i. Il n'y en a donc que $2m - 2p$ qui restent arbitraires. Si l'on y ajoute les $3p - 3$ modules des intégrales Z_i, leurs m infinis et les constantes ξ_0, η_0, le nombre total des indéterminées de la courbe $F = 0$ devient bien égal à

$$2m - 2p + 3p - 3 + m + 2 = 3m + p - 1 = \tfrac{1}{2}m(m+3) - d.$$

Mais à cette occasion, voici une remarque; on peut supposer que ce nombre $3m + p - 1$ soit obtenu par des considérations géométriques. Alors le raisonnement précédent donne une voie assez rapide pour parvenir au nombre $3p - 3$ des modules de la courbe $f = 0$, résultat dont toutes les démonstrations données jusqu'ici me semblent bien compliquées. Ce raisonnement ne s'applique pas aux cas $p = 0$ et $p = 1$, car alors on peut réduire le nombre des arbitraires par les procédés que vous mentionnez dans votre lettre. —

J'espère ne pas vous fatiguer, Monsieur, en vous communiquant encore une démonstration du principe de correspondance, dû à MM. *Cayley* et *Brill;* car c'est encore le théorème de *Roch* et votre méthode d'en faire usage pour des problèmes algébriques, qui m'ont fourni les moyens d'achever cette démonstration.

Je vais considérer une fonction rationnelle λ de x, y qui a $m = \alpha + \gamma$ zéros et autant d'infinis, en supposant que les coordonnées x, y soient toujours assujetties à une relation algébrique $f(x, y) = 0$, équation d'une courbe de genre p. En appliquant les mêmes notations dont je me suis servi

dans ma première lettre, j'ai

$$(1.) \quad \lambda = \lambda_0 + A_1 Z_1(x, y) + A_2 Z_2(x, y) + \cdots + A_m Z_m(x, y).$$

Les constantes A_i satisfont, d'après le théorème de ***Roch***, aux p relations:

$$(2.) \quad A_1 \frac{\varphi_h(x_1, y_1)}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} + A_2 \frac{\varphi_h(x_2, y_2)}{\frac{\partial f}{\partial y_2}} + \cdots + A_m \frac{\varphi_h(x_m, y_m)}{\frac{\partial f}{\partial y_m}} = 0$$

$$h = 1, 2, \ldots p.$$

Je suppose maintenant qu'il y ait γ zéros de la fonction λ situés infiniment près d'un point donné x', y', de sorte que l'on ait

$$(3.) \quad \begin{cases} \lambda_0 + \sum_i A_i Z_i(x', y') = 0, \\ \sum_i A_i Z_i'(x', y') = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_i A_i Z_i^{(\gamma-1)}(x', y') = 0, \end{cases}$$

où $Z_i^{(k)}$ désigne la $k^{\text{ième}}$ dérivée de Z_i par rapport à la variable indépendante. En vertu de ces γ relations et des p relations (2.), $\gamma + p$ des quantités A_i se déterminent en fonctions des autres $m-p$ et des fonctions $Z_i^{(k)}(x', y')$. L'équation $\lambda = 0$ établit donc une dépendance qui fait correspondre à chaque point x', y', $\alpha = m - \gamma$ points x, y distincts du point x', y' et, en outre, γ points qui se confondent avec x', y'. D'après la signification convenue c'est une correspondance $(\alpha, \beta)_\gamma$ dans laquelle je vais déterminer d'abord le nombre β, nombre des points x', y' qui, réciproquement, correspondent à un point x, y; ensuite je considérerai le nombre des coincidences.

En calculant $\gamma + p$ des quantités A_i ($A_1, A_2 \ldots A_{\gamma+p}$ par exemple) à l'aide des équations (2.) et (3.), vous les trouvez sous forme de certains déterminants. Le nombre des zéros de chacun d'eux, regardé comme fonction de x, y, doit être égal au nombre de ses infinis; il se détermine donc de la manière suivante.

Dans le dénominateur d'une fonction $Z_i^{(k)}(x, y)$, vous trouvez le facteur $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^k$ lequel est égal à

$$\left(\frac{\varphi(x, y)}{J'}\right)^k,$$

J' désignant, comme précédemment, la dérivée d'une intégrale J de première espèce. Considérons maintenant, au lieu des fonctions $Z_i^{(k)}$, les fonctions

$$H_i^{(k)}(x, y) \, . \, J'^k = Z_i^{(k)}(x, y).$$

La fonction $H_i^{(k)}(x,y)$ est infinie de l'ordre k aux $2p-2$ zéros de $\varphi(x,y)$ qui ne se réunissent pas aux points doubles de $f=0$; et elle a un infini de l'ordre $k+1$ au point x_i, y_i. Si l'on néglige les facteurs J'^k des premiers membres des équations (3.), celles-ci deviennent

$$(4.)\quad \begin{cases} \lambda_0 + \sum_i A_i Z_i(x',y') = 0, \\ \sum_i A_i H_i^{(k)}(x',y') = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \gamma-1. \end{cases}$$

En calculant maintenant les quantités A_1, A_2, ... $A_{\gamma+p}$ au moyen des relations (2.) et (4.), vous obtiendrez des expressions linéaires de plusieurs produits de fonctions Z_i et $H_i^{(k)}$. Le plus grand nombre de telles fonctions qui se trouvent réunies en un même produit est égal à γ. Ces expressions deviennent donc infinies, par rapport aux $2p-2$ zéros simples de $\varphi(x,y)$, de la même manière que la fonction

$$Z_k H_i' H_k'' \ldots H_l^{(\gamma-1)};$$

elles sont, par conséquent, infinies de l'ordre

$$1+2+3+\cdots+(\gamma-1) = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-1)$$

en chacun de ces $2p-2$ points. En outre, chacune de ces expressions a m infinis de l'ordre γ, savoir les points x_i, y_i. En somme, les infinis d'une des quantités A_1, ... $A_{\gamma+p}$ sont au nombre de

$$\tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-1)(2p-2)+m\gamma = \gamma\alpha+\gamma(\gamma-1)p+\gamma.$$

Il s'en suit que les zéros des $\gamma+p$ quantités A_i dont il s'agit, sont en même nombre. Par conséquent, la fonction λ, considerée comme fonction de x', y' en vertu des équations (3.), devient nulle en

$$\gamma\alpha+\gamma(\gamma-1)p+\gamma$$

points. Or il est aisé de voir que γ de ces points se confondent avec le point x, y (voir, par exemple, les „leçons de *Clebsch*," p. 443). Donc, le nombre β des points x', y' qui correspondent à un point x, y et qui sont distincts de ce point, se trouve égal à

$$(5.)\quad \beta = \gamma[\alpha+(\gamma-1)p] = \gamma[m-1+(\gamma-1)(p-1)].$$

Il est déjà fixé par les nombres α et γ, résultat que j'ai prouvé d'une autre manière dans mon édition des leçons de *Clebsch* (p. 735).

Le nombre des coincidences de la correspondance $(\alpha,\beta)_\gamma$, ainsi définie, s'obtient maintenant, quand on ajoute aux $\gamma+p$ équations (1.) et (4.) l'équation

$$(6.)\quad A_1 H_1^{(\gamma)}(x',y') + A_2 H_2^{(\gamma)}(x',y') + \cdots + A_m H_m^{(\gamma)}(x',y') = 0.$$

En éliminant les $\gamma+p$ quantités $A_1, \ldots A_{\gamma+p}$, on trouve pour résultant un déterminant dont on détermine le nombre des zéros de la même manière que nous venons de trouver le nombre β. En effet, ce déterminant a un infini d'ordre

$$1+2+3+\cdots+\gamma = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma+1)$$

en chaque zéro simple de $\varphi(x, y)$, et il a pour infini d'ordre $\gamma+1$ chacun des points x_i, y_i. Le nombre total de ses infinis et, par conséquent, de ses zéros devient donc égal à

$$\tfrac{1}{2}\gamma(\gamma+1)(2p-2)+m(\gamma+1) = (\gamma+1)[m+\gamma(p-1)]$$
$$= \alpha+\beta+2\gamma p,$$

résultat qui s'accorde bien avec la formule établie par MM. *Cayley* et *Brill*.

Ce raisonnement ne s'applique pas immédiatement aux cas où la courbe $\lambda = 0$ qui détermine les points x, y, correspondant à x', y', se décompose en plusieurs courbes, touchant la courbe $f = 0$ en x', y' par des contacts de divers ordres. Alors le nombre β n'est plus déterminé par la formule (5.); mais avec quelques légères modifications, on obtient toujours la valeur $\alpha+\beta+2\gamma p$ comme nombre des coincidences, γ étant maintenant le nombre total des zéros de la fonction λ qui se confondent avec le point x', y'.

Pour le cas $\gamma = 1$, ces procédés sont tout-à-fait analogues à ceux que j'ai pris la liberté de vous communiquer dans ma première lettre. Effectivement, la classe de la courbe transformée $F(\xi, \eta) = 0$ doit être égale au nombre des courbes du faisceau

$$\xi+k\eta = 0$$

qui touchent la courbe $f = 0$. L'équation (6.) est remplacée maintenant par

$$\xi'+k\eta' = 0.$$

Le nombre cherché est donc bien égal au nombre des zéros ou des infinis de la fonction $\xi\eta'-\eta\xi'$ (v. p. 296).

Würzburg, 19 juillet 1877.

Ueber das elektrodynamische Grundgesetz.

(Von Herrn *H. Lorberg* in Strassburg.)

§. 1. Einleitung.

Im 82. Bande dieses Journals leitet Herr *Clausius* ein neues Grundgesetz für die gegenseitige Wirkung zweier bewegten Elektricitätstheilchen ab, indem er zuerst die allgemeine Form für den Ausdruck dieser Kraft aufstellt, falls derselbe nur die ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit, erstere bis zum zweiten, letztere im ersten Grade enthalten soll, und die darin vorkommenden unbestimmten Functionen der Entfernungen durch gewisse, für geschlossene Ströme geltende Erfahrungsthatsachen und durch das Princip der Energie bestimmt. Bezeichnet man mit $\frac{d}{dt}$ einen Differentialquotienten nach der Zeit, welcher sich nur auf die Bewegung des ersten Elektricitätstheilchens e bezieht, mit $\frac{d'}{dt}$ dasselbe für das zweite Elektricitätstheilchen e', und setzt die x-Componente der von e' auf e ausgeübten elektrodynamischen Kraft $= ee'\mathfrak{X}$, so lässt sich das *Clausius*sche Gesetz folgendermaassen ausdrücken:

$$(a.)\qquad \mathfrak{X} = -\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{dd'(r^2)}{dt^2} - k\left(\frac{d}{dt}+\frac{d'}{dt}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{d'^2 R}{dt^2}\right),$$

wo R eine unbestimmte Function von r ist. Herr *Clausius* leitet dieses Gesetz unter der Annahme ab, dass in einem Stromelement sich gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität befinden, dass aber nur die positive Elektricität strömt, während die negative mit dem Leiter fest verbunden ist; indessen bemerkt er, dass man genau dasselbe Resultat erhalte, wenn man annimmt, dass beide Elektricitäten mit beliebigen, entgegengesetzten Geschwindigkeiten strömen, — was aber, wie die folgende Untersuchung zeigen wird, nur in dem Falle richtig ist, wenn diese Geschwindigkeiten nicht gleich sind —; und in den Anwendungen, welche er später von seinem Gesetz gemacht hat *), legt er auch diese allgemeinere Anschauung zu Grunde. Auf einige auffällige Abweichungen dieser Folge-

*) *Pogg.* Ann., Neue Folge, Bd. I.

rungen von der bisherigen, aus dem *Weber*schen oder *Helmholtz*schen Gesetz abgeleiteten Theorie möchte ich zunächst aufmerksam machen.

Bezeichnet man mit v und $-v_1$ die Strömungsgeschwindigkeit der positiven und negativen Elektricität in dem Leiterelement ds, mit v' und $-v_1'$ dasselbe für das Leiterelement ds', ferner mit $\frac{\delta}{dt}$ und $\frac{\delta'}{dt}$ Differentialquotienten, welche sich auf die Bewegung der Leiterelemente ds und ds' beziehen, mit h und h' die in der Längeneinheit der zwei Leiter befindlichen Mengen positiver (oder negativer) Elektricität, so dass $e = h\,ds$, $e' = h'ds'$, die Stromintensitäten $J = h\frac{v+v_1}{2}$, $J' = h'\frac{v'+v_1'}{2}$ sind, so hat man für die Theilchen $+e$, $+e'$ zu setzen

$$\frac{d}{dt} = v\frac{d}{ds} + \frac{\delta}{dt}, \quad \frac{d'}{dt} = v'\frac{d}{ds'} + \frac{\delta'}{dt},$$

und indem man für die negative Elektricität nur v und v' mit $-v_1$ und $-v_1'$, h und h' mit $-h$ und $-h'$ vertauscht, erhält man aus (a.) für die Summe der von der positiven und negativen Elektricität in ds' auf die positive Elektricität in ds ausgeübten Kräfte, wenn beide Leiterelemente sich bewegen und ihre Intensität ändern, folgenden Ausdruck, worin

$$k = \frac{2}{\varkappa^2}, \quad -\frac{2}{\varkappa^2 r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d^2 R}{dx\,ds'} = f, \quad r\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{\delta r}{dt} + \frac{2}{r}\frac{\delta x'}{dt} - \varkappa^2\frac{d}{dx}\frac{\delta' R}{dt} = \varphi$$

gesetzt ist, und wo $\varkappa$ die Constante des *Weber*schen Grundgesetzes bezeichnet:

$$(b.)\quad \left\{\begin{aligned} X_{\mp e', +e} = & -\frac{2}{\varkappa^2} v(v_1 + v_1')\left[\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2 r^2}{ds\,ds'} + \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right] \\ & -\frac{2}{\varkappa^2}(v' + v_1')\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,ds'}\frac{\delta r^2}{dt} + \frac{dx'}{ds'}\left(\frac{\delta\frac{1}{r}}{dt} + \frac{\delta'\frac{1}{r}}{dt}\right) - \frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{\delta x'}{dt} + \frac{d\varphi}{ds'}\right] \\ & + (v'^2 - v_1'^2)\frac{df}{ds'} + \left[\frac{1}{2}\frac{d(v'^2 - v_1'^2)}{ds'} + \frac{d(v' + v_1')}{dt}\right]f. \end{aligned}\right.$$

In der Summe der auf die positive und negative Elektricität in ds ausgeübten Kräfte bleibt nur das erste der vier Glieder dieses Ausdrucks übrig; dasselbe giebt also die ponderomotorische Kraft des Stromelements ds' auf ds an; die Resultirende dieser ponderomotorischen Kräfte ist auf ds senkrecht. In der nach ds gerichteten Componente der Kräfte X, Y, Z fällt mithin das erste Glied weg, die Summe der drei andern giebt folglich die nach ds gerichtete, auf die positive und negative Elektricität von ds in

entgegengesetztem Sinne wirkende, d. h. die elektromotorische Kraft an. Auffällig in dem Ausdruck dieser elektromotorischen Kraft ist zunächst das Glied $(v'^2 - v_1'^2)\frac{df}{ds'}$; dasselbe drückt nämlich eine elektromotorische Kraft aus, welche ein ruhender und constanter Strom s' auf einen andern ruhenden Strom ausübt, und welche proportional mit $e'(v'^2 - v_1'^2) = 2J'ds'(v' - v_1')$, also nicht lediglich proportional mit J' ist; auch kann dieses Glied für einen ungeschlossenen Strom s' durch keine Bestimmung der Function R zum Verschwinden gebracht werden, da dann auch das letzte, mit

$$e'\frac{d(v'+v_1')}{dt} = 2\,ds'\frac{dJ'}{dt}$$

multiplicirte Glied wegfallen, mithin keine elektromotorische Kraft durch Intensitätsänderung entstehen würde. Nur die Annahme $v' = v_1'$ bringt das dritte Glied zum Verschwinden; allein unter dieser Annahme ist, wie ich im folgenden Paragraphen zeigen werde, das *Clausius*sche Gesetz nicht das einzig mögliche.

Eine andere, von dieser Annahme unabhängige Consequenz des *Clausius*schen Gesetzes ist die folgende. Denken wir uns die zwei Stromleiter unveränderlich mit einander verbunden und so in beliebiger Weise durch Verschiebung nach einer bestimmten Richtung und Drehung um die Coordinatenaxen bewegt, so haben wir in (*b.*) $\frac{\delta' r}{dt} = -\frac{\delta r}{dt}$ zu setzen; da ferner $\frac{\delta x'}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta' r^2}{dt}\right)$, so erhalten wir aus (*b.*), wenn der Strom s' geschlossen ist, für die durch diese Bewegung entstehende Kraft, welche, da sie auf die positive und negative Elektricität in entgegengesetztem Sinne wirkt, eine elektromotorische ist,

$$(c.)\qquad E_x = \frac{2}{\varkappa^2}eJ'\int\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,ds'}\frac{\delta r^2}{dt} - \frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta' r^2}{dt}\right)\right]ds' = -\frac{2}{\varkappa^2}eJ'\frac{d}{dx}\int\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{\delta' r^2}{dt}ds'.$$

Die von diesen Kräften an dem Leiter s bei der Strömung geleistete Arbeit ist also

$$(d.)\qquad A = \frac{8}{\varkappa^2}JJ'\left[\int\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{\delta' r}{dt}ds'\right]_1^2$$

wo $[\,]_1^2$ die Differenz der Werthe des Integrals an den beiden Enden des Leiters s bezeichnet. Hiernach würde ein geschlossener (oder auch ungeschlossener) Strom in einem ungeschlossenen Leiter bei einer solchen Be-

wegung beider, bei welcher sich ihre relative Lage und ihr relativer Bewegungszustand nicht ändert, einen inducirten Strom hervorrufen; in einem Körper z. B., in welchem elektrische Strömungen — die ja an der Oberfläche endigen können — stattfinden, würde durch eine beliebige Bewegung des Körpers nach (*c.*) in jedem Punkt eine elektromotorische Kraft erzeugt und mithin der elektrische Zustand des Körpers verändert werden. Denken wir uns einen kreisförmigen, von einem Strom durchflossenen Draht s' vom Radius ϱ' (oder auch einen Linearmagneten) mit einer Winkelgeschwindigkeit γ um seine Axe gedreht und den einen Theil L einer geschlossenen Leitung an der Axe befestigt und mit dieser gedreht, während der andere Theil L' ruht, so entsteht an dem letzteren keine elektromotorische Kraft; denn indem wir $\frac{\delta}{dt} = 0$, $\frac{\delta'}{dt} = \gamma\varrho'\frac{d}{ds'}$ setzen, erhalten wir aus (*b.*)

$$(e.)\qquad E_x = -\frac{4}{x^2}eJ'\int\left[\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta'\frac{1}{r}}{dt} - \frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{\delta x'}{dt}\right]ds' = 0;$$

dagegen entsteht in dem Leitertheil L und mithin in der ganzen geschlossenen Leitung ein Strom, für welchen nach (*d.*) die bei der Strömung geleistete Arbeit

$$(f.)\qquad A = \frac{8}{x^2}JJ'\gamma\varrho'\int\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 ds'$$

ist, wo der Werth des Integrals sich auf den beweglichen Endpunkt von L bezieht. Derselbe Strom entsteht auch, wenn sich L allein dreht; denn in diesem Falle haben wir in (*b.*) $\frac{\delta'}{dt} = 0$, $\frac{\delta}{dt} = -\gamma\varrho'\frac{d}{ds'}$ zu setzen, und erhalten

$$A_1 = \frac{8}{x^2}JJ'\gamma\varrho'\int\int\left[\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2r^2}{ds'^2} - \frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\right]ds\,ds'$$

$$= \frac{8}{x^2}JJ'\gamma\varrho'\int\int\left[-\frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2\right)\right]ds\,ds' = A.$$

Allerdings ist dieser unter dem Namen des „*Plücker*schen“ in letzter Zeit mehrfach besprochene Versuch, von welchem *Webers* „unipolare Induction“ einen speciellen Fall bildet, nicht geeignet, eine experimentelle Entscheidung zwischen dem *Clausius*schen und dem *Weber*schen Gesetz herbeizuführen, so lange man nur den in der Leitung inducirten Gesammtstrom beobachtet; denn nach dem *Weber*schen Grundgesetz entsteht ein durch genau dieselbe Gleichung (*f.*) ausgedrückter Strom, und zwar sowohl wenn der Leitertheil L allein, als auch wenn L und s' gemeinschaftlich gedreht werden; der Unter-

schied liegt nur darin, dass im letzteren Falle nach dem *Weber*schen Gesetz der Strom nicht durch Induction an L, sondern an L' entsteht, nach dem *Clausius*schen Gesetz dagegen beide Male durch Induction an L. Eine Entscheidung liesse sich nur durch Untersuchung der Vorgänge in den einzelnen Leitertheilen L und L' selbst gewinnen, oder durch Untersuchung der Strömung in einem nicht linearen Leiter, in welchem die Drehung eines Kreisstromes oder Linearmagneten um seine Axe nach dem *Weber*schen Gesetz eine durch die Gleichung (*c.*) ausgedrückte oder gar keine elektromotorische Kraft hervorruft, je nachdem der Körper ruht oder sich mitdreht, während es nach dem *Clausius*schen Gesetz, den Gleichungen (*c.*) und (*e.*) zufolge, gerade umgekehrt ist.

Eine nähere Untersuchung ergiebt nämlich Folgendes: Wenn eine Stromspirale oder ein Linearmagnet (d. h. ein Magnet, welcher näherungsweise durch eine geradlinige Reihe magnetischer Moleküle mit zusammenfallender Axenrichtung ersetzt werden kann) sich mit constanter Geschwindigkeit um seine Axe dreht, so findet nach dem *Weber*schen Gesetz in einem ruhenden Körper im stationären Zustand eine Entwickelung von freier Elektricität im Innern und an der Oberfläche Statt, nach dem *Clausius*schen Gesetz dagegen, der Gleichung (*e.*) zufolge, gar keine Wirkung: eine Consequenz, welche sich experimentell prüfen lassen muss. Wenn ferner ein beliebiger geschlossener Strom oder ein Magnet mit einem körperlichen Leiter fest verbunden ist und mit diesem zugleich um eine beliebige Axe gedreht wird, so würde nach dem *Clausius*schen Gesetz in dem dabei nothwendig mit der Zeit eintretenden stationären Zustand im Innern und an der Oberfläche des Leiters eine Entwickelung von freier Elektricität stattfinden, mithin auch ein Magnet selbst durch blosse Drehung um eine beliebige Axe elektrisirt werden: eine Folgerung, welche auch ohne vorherige Controle durch das Experiment geeignet erscheint, gegründete Bedenken gegen die Richtigkeit des *Clausius*schen Gesetzes zu erwecken. Allerdings hat kürzlich Herr *Riecke* *) dieselbe Folgerung aus einer Theorie gezogen, welcher er das von Herrn *Weber* aufgestellte „Grundgesetz der Magnetinduction" zu Grunde zu legen behauptet, ohne indess a. a. O. eine solche Ableitung zu geben; ich glaube aber **) nachgewiesen zu haben, dass die Formeln des

*) „Zur Theorie der unipolaren Induction und der *Plücker*schen Versuche". *Pogg.* Ann., neue Folge, Bd. I.

**) „Ueber Magnetinduction und über einige Folgerungen aus dem *Clausius*schen Grundgesetz der Elektrodynamik". *Pogg.* Ann. Ergänzungsband VIII.

Herrn *Riecke* dem *Weber*schen Grundgesetz widersprechen, sowie sie sich auch, soweit mir bekannt ist, auf kein von Herrn *Weber* etwa unabhängig von seinem elektrodynamischen Grundgesetz aufgestelltes „Grundgesetz der Magnetinduction" stützen können. Ich will die erwähnten Resultate im Nachstehenden kurz ableiten.

Es sei s' ein geschlossener Strom von der Intensität J', welcher sich um eine feste Axe dreht; die Geschwindigkeits-Componenten eines Punktes (x', y', z') desselben nach den Coordinatenaxen seien

$$\frac{\delta x'}{dt} = \beta z' - \gamma y', \quad \frac{\delta y'}{dt} = \gamma x' - \alpha z', \quad \frac{\delta z'}{dt} = \alpha y' - \beta x';$$

die Geschwindigkeits-Componenten eines mit demselben fest verbunden gedachten Leiterpunktes (x, y, z) sind dann $\frac{\delta x}{dt} = \beta z - \gamma y$ etc., und es ist $\frac{\delta r}{dt} + \frac{\delta' r}{dt} = 0$. Ferner seien die über den ganzen Strom ausgedehnten Integrale

$$\int \frac{dx'}{r} = A, \quad \int \frac{dy'}{r} = B, \quad \int \frac{dz'}{r} = C.$$

Die elektromotorische Kraft des Stromes s' auf die im Punkt x befindliche positive Elektricitätseinheit ist dann nach dem *Weber*schen Gesetz

$$\mathfrak{X} = \frac{4}{\varkappa^2} J' \int \left[\frac{\delta'}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{dr}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{\delta' r}{dt} \right) \right] ds',$$

folglich für einen um seine Axe gedrehten Kreisstrom, wo das erste Glied verschwindet,

$$(A.) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = -\frac{dF}{dx}, \\ F = -\frac{4}{\varkappa^2} J' \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{\delta r}{dt} ds' = \frac{4}{\varkappa^2} J' \int \left[\frac{\delta x}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{d^2 r}{ds' dx} \right) + \cdots \right] ds' \\ \quad = \frac{4}{\varkappa^2} J' \left(A \frac{\delta x}{dt} + B \frac{\delta y}{dt} + C \frac{\delta z}{dt} \right). \end{cases}$$

Wird also eine Stromspirale mit der constanten Winkelgeschwindigkeit γ um ihre Axe, welche wir zur z-Axe nehmen, gedreht, so ist für eine einzelne Windung vom Radius R_0 und der Coordinate $z = z_0$ der Werth von F in einem Punkt mit den Coordinaten $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, z

$$(B.) \quad \begin{cases} F = \frac{4}{\varkappa^2} J' \gamma (x B - y A) = \frac{4}{\varkappa^2} J' \gamma R_0 R \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi' - \varphi)}{r} d\varphi' \\ \quad = \frac{16}{\varkappa^2} J' \gamma \frac{R_0 R \sqrt{1 + k^2}}{k \sqrt{R_0^2 + R^2 + (z - z_0)^2}} [F_1(k) - E_1(k)], \end{cases}$$

wenn F_1 und E_1 die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Modul

$$k = \frac{R_0^2+R^2+(z-z_0)^2-\sqrt{(R_0^2+R^2+(z-z_0)^2)^2-4R_0^2R^2}}{2R_0R}$$

bedeuten. Für einen unendlich kleinen Strom oder ein magnetisches Molekül von dem (in elektromagnetischem Mass gemessenen) Moment M, dessen Axe der z-Axe parallel ist, wird

$$(B'.)\qquad \frac{4}{\varkappa^2}J'A = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\frac{d\frac{1}{r}}{dy},\quad \frac{4}{\varkappa^2}J'B = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\frac{d\frac{1}{r}}{dx},\quad C=0,$$

folglich, wenn das Molekül auf der z-Axe im Punkt $z=\zeta$ liegt und sich mit der Winkelgeschwindigkeit γ um dieselbe dreht,

$$(B''.)\qquad F = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\gamma\left(x\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+y\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\gamma\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\gamma\frac{d^2r}{d\zeta^2},$$

mithin für einen auf der z-Axe zwischen $\zeta=\zeta_0$ und $\zeta=\zeta_1$ liegenden Linearmagneten, wenn wir die Menge nordmagnetischen Fluidums eines Moleküls mit μ bezeichnen, also $M=\mu d\zeta$ setzen,

$$(B'''.)\qquad F = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma\left[\mu_1\left(\frac{dr}{d\zeta}\right)_1-\mu_0\left(\frac{dr}{d\zeta}\right)_0-\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{d\mu}{d\zeta}\frac{dr}{d\zeta}d\zeta\right].$$

Es befinde sich nun in der Nähe des sich drehenden Magneten ein ruhender körperlicher Leiter; es wird dann in demselben ein stationärer Zustand eintreten, in welchem die Stromdichtigkeiten nach den Coordinatenaxen u, v, w sowie die Dichtigkeiten ε, e der im Innern und auf der Oberfläche verbreiteten freien Elektricität blosse Functionen der Coordinaten sind; da dann die inneren Ströme keine elektromotorische Kraft ausüben, so gehen die bekannten *Kirchhoff*schen Gleichungen in folgende über, wenn Ω das Potential der freien Elektricität, k die Leitungsfähigkeit, dN das Element der nach Innen gerichteten Normale der Oberfläche und λ, μ, ν ihre Winkel mit den Axen bedeuten und

$$\Omega+F = H$$

gesetzt wird:

$$(C.)\qquad \frac{u}{2k} = -\frac{dH}{dx},\quad \frac{v}{2k} = -\frac{dH}{dy},\quad \frac{w}{2k} = -\frac{dH}{dz};$$

$$(D.)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz} = 0,\quad u\cos\lambda+v\cos\mu+w\cos\nu = 0.$$

Daraus folgt $\Delta H = 0$, $\frac{dH}{dN} = 0$: aus der ersteren dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn $d\tau$ das Volumelement, $d\sigma$ das Oberflächenelement des Körpers bezeichnet,

$$0 = \int H\Delta H d\tau = \int\Big[\frac{d}{dx}\Big(H\frac{dH}{dx}\Big) + \frac{d}{dy}\Big(H\frac{dH}{dy}\Big) + \frac{d}{dz}\Big(H\frac{dH}{dz}\Big)\Big]d\tau$$

$$-\int\Big[\Big(\frac{dH}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dH}{dy}\Big)^2 + \Big(\frac{dH}{dz}\Big)^2\Big]d\tau = -\int H\frac{dH}{dN}d\sigma - \int\Big[\Big(\frac{dH}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dH}{dy}\Big)^2 + \Big(\frac{dH}{dz}\Big)^2\Big]d\tau,$$

folglich, da $\frac{dH}{dN} = 0$ ist, $H = \text{const.} = 0$, da für $F = 0$ auch $\Omega = 0$ sein muss: mithin

$$(E.)\qquad \Omega = -F, \quad u = v = w = 0.$$

Daraus folgt dann mittelst $(B''.)$

$$(F.)\quad \begin{cases} \varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\Delta\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2\pi x}\gamma\left[\mu_1\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\right)_1 - \mu_0\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\right)_0 - \int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{d\mu}{d\zeta}\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}d\zeta\right], \\ e = -\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{d\Omega}{dN} - \frac{d\Omega_a}{dN}\Big) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{dF}{dN} + \frac{d\Omega_a}{dN}\Big). \end{cases}$$

wo Ω_a den im äusseren Raum stattfindenden Werth von Ω bezeichnet, welcher sich in bekannter Weise aus dem im Innern stattfindenden Werth $\Omega = -F$ ergiebt. Um das Vorstehende auf ein möglichst einfaches Beispiel anzuwenden, wollen wir den Leiter als eine Kugel vom Radius a und den Linearmagneten auf der Verlängerung eines Durchmessers derselben annehmen und μ für alle Punkte des Magneten als constant voraussetzen. Führen wir Polarcoordinaten ϱ, ϑ, φ ein und bezeichnen mit $P^n(\cos\vartheta)$ die Kugelfunction n^{ter} Ordnung, so ist der dem Ende ζ_1 entsprechende Werth von Ω

$$\Omega = -F = -\frac{\sqrt{2}}{x}\gamma\mu_1\Sigma\Big(\frac{n-1}{2n-1}\frac{\varrho^n}{\zeta_1^n} - \frac{n+1}{2n+3}\frac{\varrho^{n+2}}{\zeta_1^{n+2}}\Big)P^n(\cos\vartheta),$$

$$\Omega_a = -\frac{\sqrt{2}}{x}\gamma\mu_1\Sigma\frac{a^{2n+1}}{\varrho^{n+1}}\Big(\frac{n-1}{2n-1}\frac{a^n}{\zeta_1^n} - \frac{n+1}{2n+3}\frac{a^{n+2}}{\zeta_1^{n+2}}\Big)P^n(\cos\vartheta),$$

folglich die durch den ganzen Magneten auf der Oberfläche entwickelte elektrische Dichtigkeit, wenn wir $\mu_0 = \mu_1$ setzen,

$$(G.)\quad \begin{cases} e = \frac{\sqrt{2}}{4\pi x}\frac{\gamma\mu_0}{a}\Sigma\Big[\frac{(n-1)(2n+1)}{2n-1}a^n\Big(\frac{1}{\zeta_0^n} - \frac{1}{\zeta_1^n}\Big) \\ \qquad (n+1)a^{n+2}\Big(\frac{1}{\zeta_0^{n+2}} - \frac{1}{\zeta_1^{n+2}}\Big)\Big]P^n(\cos\vartheta), \end{cases}$$

und die Elektricitätsmenge der ganzen Kugelfläche

$$E = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma\mu_{0}a^3\left(\frac{1}{\zeta_0^2}-\frac{1}{\zeta_1^2}\right).$$

Für $\zeta_1=\infty$, $\frac{a}{\zeta_0}=x$ wird hiernach an dem dem Pol zunächstliegenden Punkt der Kugel

$$e = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varkappa}\frac{\gamma\mu_0}{a}\left[\frac{x}{1-x}-\tfrac{1}{2}\sqrt{x}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right].$$

Nach dem *Clausius*schen Gesetz dagegen würde gar keine Wirkung auf den Leiter stattfinden.

Um die zweite der oben erwähnten Consequenzen des *Clausius*schen Gesetzes zu entwickeln, denken wir uns einen beliebigen geschlossenen Strom s', welcher mit einem körperlichen Leiter fest verbunden ist und mit diesem um eine im Raum feste Axe gedreht wird; derselbe übt dann nach dem *Clausius*schen Gesetz nach Gleichung (*c.*) in dem Punkt x des Leiters eine elektromotorische Kraft aus

$$\mathfrak{X} = -\frac{4}{\varkappa^2}J'\frac{d}{dx}\int\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{\delta r}{dt}ds' = \frac{dF}{dx},$$

wo F den durch die Gleichung (*A.*) gegebenen Werth hat; oder

$$(H.)\qquad \mathfrak{X} = -\frac{dF}{dx},$$

wenn die Drehung im entgegengesetzten Sinne wie bei dem vorigen Versuch geschieht. Ersetzen wir den Strom durch ein magnetisches Molekül vom Moment M, dessen Axe der Drehungsaxe, welche wir wieder zur z-Axe nehmen, parallel ist und von derselben den Abstand R_0 hat, so wird nach (*B'.*)

$$F = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\gamma\left(x\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+y\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\gamma\left(\frac{d^2r}{dz^2}+R_0\frac{d\frac{1}{r}}{dR_0}\right).$$

Für einen körperlichen Magneten, welcher in einem Volumelement $d\tau_0$ eine Anzahl $qd\tau_0$ magnetischer Moleküle enthält, deren Axen sämmtlich der z-Axe parallel sind, ist also in einer Entfernung R von dieser Axe

$$(I.)\qquad F = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma R\frac{d}{dR}\int\frac{qM}{r}d\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma\left[\frac{d^2}{dz^2}\int qMr\,d\tau_0+\int qMR_0\frac{d\frac{1}{r}}{dR_0}d\tau_0\right],$$

während für einen auf der Drehungsaxe liegenden Linearmagneten F durch

die Gleichung ($B.'''$) bestimmt ist. Bei dem vorliegenden Problem können wir nun offenbar die bisher als unbeweglich betrachteten Coordinatenaxen auch als mit dem gedrehten Körper fest verbunden annehmen; im stationären Zustand sind dann u, v, w, ε, e blosse Functionen der Coordinaten, von denen die drei ersteren den Gleichungen ($D.$) genügen. Um die elektromotorische Kraft zu berechnen, welche die in einem Volumelement $d\tau'$ stattfindenden Strömungen u', v', w' in einem Punkt x des Leiters ausüben, wollen wir zuerst die zwei letzten Glieder des Ausdrucks ($b.$) betrachten. Multipliciren wir dieselben mit $\frac{e'}{ds'} = h'$ und beachten die Gleichungen

$$-\frac{d(h'v')}{ds'} = \frac{d(h'v_1')}{ds'} = \frac{dh'}{dt},$$

so ergiebt sich

$$h'(v'^2 - v_1'^2)\frac{df}{ds'} + h'f\left(v'\frac{dv'}{ds'} - v_1'\frac{dv_1'}{ds'} + \frac{d(v'+v_1')}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{ds'}[h'(v'^2 - v_1'^2)f] + f\left[-v'\frac{d(h'v')}{ds'} + v_1'\frac{d(h'v_1')}{ds'} + \frac{d}{dt}(h'(v'+v_1')) - (v'+v_1')\frac{dh'}{dt}\right]$$

$$= 2\frac{d}{ds'}[(v'-v_1')J'f] + 2f\frac{dJ'}{dt};$$

da nun der zweiten der Gleichungen ($D.$) zufolge sämmtliche Stromcurven geschlossen sind, so fällt durch Integration über eine Stromcurve das erste dieser zwei Glieder fort; ebenso das zweite wegen $\frac{dJ'}{dt} = 0$. Die übrigen Glieder, mit $e' = h'ds'$ multiplicirt, lassen sich unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\frac{\delta r}{dt} + \frac{\delta' r}{dt} = 0, \quad \frac{\delta x'}{dt} = -\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta' r^2}{dt}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta r^2}{dt}\right)$$

folgendermaassen schreiben:

$$\mathfrak{X} = \frac{4}{\varkappa^2}J'ds'\left[\tfrac{1}{2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,ds'}\frac{\delta r^2}{dt} + \frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{\delta x'}{dt} - \frac{d\varphi}{ds'}\right]$$

$$= \frac{4}{\varkappa^2}J'ds'\left[\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{\delta r^2}{dt}\right) - \frac{d\varphi}{ds'}\right].$$

Bezeichnen wir also die resultirende Stromdichtigkeit mit ϑ', setzen $J'ds' = \vartheta' d\tau'$ und beachten die Gleichung

$$\vartheta'\frac{d}{ds'} = u'\frac{d}{dx'} + v'\frac{d}{dy'} + w'\frac{d}{dz'},$$

so wird die von dem ganzen Körper ausgeübte elektromotorische Kraft

$$E_x = \frac{2}{\varkappa^2}\frac{d}{dx}\int\left(u'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+v'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+w'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)\frac{\delta r^2}{dt}d\tau'$$
$$-\frac{4}{\varkappa^2}\int\left(u'\frac{d\varphi}{dx'}+v'\frac{d\varphi}{dy'}+w'\frac{d\varphi}{dz'}\right)d\tau'.$$

Nun ist aber den Gleichungen (*D.*) zufolge, wenn $d\sigma'$ ein Element der Oberfläche bezeichnet,

$$\int\left(u'\frac{d\varphi}{dx'}+\cdots\right)d\tau' = \int\left[\frac{d(u'\varphi)}{dx'}+\frac{d(v'\varphi)}{dy'}+\frac{d(w'\varphi)}{dz'}-\varphi\left(\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}\right)\right]d\tau'$$
$$= -\int\varphi(u'\cos\lambda+v'\cos\mu+w'\cos\nu)d\sigma'-\int\varphi\left(\frac{du'}{dx'}+\cdots\right)d\tau' = 0;$$

E_x erhält also die Form

$$(J.)\qquad E_x = -\frac{dG}{dx}.$$

Setzen wir also

$$\Omega+F+G = H,$$

so wird der elektrische Zustand des Körpers wieder durch die Gleichungen (*C.*) und (*D.*) bestimmt, aus denen $H = \text{const.} = 0$, $u = v = w = 0$, mithin auch $G = 0$ folgt. Es ergiebt sich also eine durch die Gleichung (*E.*) bestimmte Ansammlung freier Elektricität im Innern und an der Oberfläche des Leiters. Für einen mit der Drehungsaxe zusammenfallenden Linearmagneten gelten mithin wieder die Gleichungen (*F.*) und (*G.*); für einen körperlichen Magneten haben wir nach Gleichung (*I.*)

$$(K.)\qquad \varepsilon = \frac{1}{4\pi}\Delta F = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\varkappa}\gamma\frac{d^2}{dz^2}\int\frac{qM}{r}d\tau_{\prime\prime}.$$

Lassen wir den Leiter mit dem Magneten zusammenfallen, so haben wir nach Gleichung (*I.*)

$$(L.)\qquad \Omega = -F = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma R\frac{d}{dR}\int\frac{q'M'}{r}d\tau',$$

woraus

$$(M.)\qquad \varepsilon = \frac{1}{4\pi}\Delta F = \frac{2\sqrt{2}}{\varkappa}\left[qM+\frac{R}{2}\frac{d(qM)}{dR}+\frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{dz^2}\int\frac{q'M'}{r}d\tau'\right].$$

Der Magnet sei z. B. ein um seine Axe, die z-Axe, sich drehender Cylinder von der Länge 2ζ und dem Radius $R_{\prime\prime}$, dessen Mittelpunkt im Coordinaten-

anfang liegt; nehmen wir qM für alle Punkte des Magneten als constant an und bezeichnen mit $J^n(x)$ und $K^n(x)$ die *Bessel*sche Function erster Art und diejenige zweiter Art, welche für $x = \infty$ verschwindet, also zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dF}{dx}-\left(\frac{n^2}{x^2}+1\right)F = 0,$$

so ergiebt sich aus ($L.$)

$$(N.)\quad \begin{cases} \Omega = -\dfrac{8\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma qMR_0R\displaystyle\int_0^{\infty}K^1(R_0v)J^1(Rv)\sin\zeta v\cos zv\,\frac{dv}{v}\cdot \\ \Omega_a = -\dfrac{8\sqrt{2}}{\varkappa}qMR_0^2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{J^1(R_0v)K^1(R_0v)}{K^0(R_0v)}K^0(Rv)\sin\zeta v\cos zv\,\frac{dv}{v}, \end{cases}$$

woraus

$$(O.)\quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{4\sqrt{2}}{\pi\varkappa}\gamma qMR_0\displaystyle\int_0^{\infty}K^1(R_0v)J^0(Rv)\sin\zeta v\cos zv\,dv, \\ e = -\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi\varkappa}\gamma qMR_0\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{K^1(v)}{K^0(v)}[J^0(v)K^0(v) \\ \qquad +J^1(v)K^1(v)]\sin\left(\frac{\zeta}{R_0}v\right)\cos\left(\frac{z}{R_0}v\right)dv. \end{cases}$$

Wenn man auch die Annahme, dass nicht blos die relative, sondern auch die absolute Bewegung zweier Elektricitätstheilchen, etwa gegen den umgebenden Aether, eine Kraft zwischen ihnen hervorrufen könne*), nicht von vornherein verwerfen kann, so macht doch namentlich die letzte der im Vorhergehenden entwickelten und — abgesehen von etwaigen praktischen Schwierigkeiten — einer experimentellen Prüfung zugänglichen Folgerungen jene Annahme nicht eben wahrscheinlich; jedenfalls würde bei einer derartigen Mitwirkung des Raumes die Kraft nur scheinbar von den beiden Elektricitätstheilchen selbst ausgehen, und das Gesetz hätte, sofern es von den dabei eigentlich wirksamen Kräften keine Rechenschaft giebt, etwas Unbefriedigendes; auch die von Herrn *Clausius* bei Ableitung seines Gesetzes gemachte Anwendung des Princips der Energie scheint nur dann

*) Herr *Clausius* spricht diesen fundamentalen Gegensatz seines Gesetzes gegen die bisherigen Annahmen in einer dasselbe betreffenden Notiz (*Pogg.* Ann. Bd. 157) folgendermaassen aus: „Ich habe nämlich nicht blos die relative Bewegung der beiden Elektricitätstheilchen, sondern auch ihre absoluten Bewegungen in Betracht gezogen“.

hinreichend gerechtfertigt, wenn keine Zufuhr von Energie von aussen stattfindet.

Jedenfalls scheint es mir nicht ohne Interesse zu sein, den fruchtbaren Gedanken des Herrn *Clausius* unter der bisher üblich gewesenen Annahme durchzuführen, dass die zwischen zwei Elektricitätstheilchen wirkende Kraft nur von ihrer *relativen* Lage und Bewegung abhängt, dass sie sich also so verhält, *als ob* sie lediglich durch diese zwei Theilchen bedingt wäre. Dabei habe ich es zugleich vermieden, über die Geschwindigkeiten der zwei entgegengesetzten Elektricitäten von vorn herein eine bestimmte Annahme zu machen; die Untersuchung wird ergeben, dass nur die Annahme entgegengesetzt-gleicher Geschwindigkeiten der beiden Elektricitäten mit dem eben erwähnten Princip vereinbar ist. Einen Einwurf gegen dieses Resultat wird man aus den Erscheinungen der Elektrolyse schwerlich herleiten können, da alle Erfahrungsthatsachen, auf welche sich die vorliegende wie die bisherigen Ableitungen des elektrodynamischen Gesetzes gründet, sich auf Ströme in *metallischen* Leitern beziehen. Eine Untersuchung des Gegenstandes nach dieser Seite hin dürfte um so eher gerechtfertigt sein, als die Ansicht des Herrn *Clausius,* dass die Vorstellung *zweier* strömenden Elektricitäten eine complicirtere sei als die einer strömenden und einer mit den ponderabeln Molekülen fest verbundenen, schwerlich viele Anhänger finden wird; so lange man ein so ganz verschiedenes Verhalten der beiden Elektricitäten, die man doch nun einmal beide nöthig hat, nicht durch eine bestimmte Hypothese über die Natur der elektrischen Vorgänge erklären kann, wird man sich immer zu der Vorstellung eines Doppelstroms als der naturgemässern, weil die galvanischen Ströme mit den Erscheinungen der statischen Elektricität verbindenden, gedrängt sehen.

Ich gehe von der Form aus, welche, wie Herr *Clausius* gezeigt hat, der Ausdruck für die von einem Elektricitätstheilchen e' mit den Coordinaten (x', y', z') auf ein Elektricitätstheilchen e mit den Coordinaten (x, y, z) ausgeübte elektrodynamische Kraft nothwendig haben muss, wenn sie blos die ersten und zweiten zeitlichen Differentialquotienten der Coordinaten, und zwar die ersteren bis zum zweiten, die letzteren im ersten Grade enthalten soll; danach ist nämlich, wenn $\frac{d}{dt}$ sich auf die Bewegung des Theilchens e, $\frac{d'}{dt}$ auf die von e' bezieht, die x-Componente der erwähnten Kraft

$$ee'\mathfrak{X} = ee'(\mathfrak{X}_1+\mathfrak{X}_2+\mathfrak{X}_3),$$

$$(1.)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = B\dfrac{dx}{dt}+B_1\dfrac{d^2x}{dt^2}+B_2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dx}{dt} \\ \qquad +(x-x')\left[C\dfrac{dr}{dt}+C_1\dfrac{d^2r}{dt^2}+C_2\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2+C_3\left(\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2\right)\right], \\ \mathfrak{X}_2 = \dfrac{d'}{dt}\left(B_3\dfrac{dr}{dx}\right)+B_4\dfrac{d^2x'}{dt^2}+B_5\dfrac{d'r}{dt}\dfrac{dx'}{dt} \\ \qquad +(x-x')\left[C_4\dfrac{d'r}{dt}+C_5\dfrac{d'^2r}{dt^2}+C_6\left(\dfrac{d'r}{dt}\right)^2+C_7\left(\left(\dfrac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz'}{dt}\right)^2\right)\right], \\ \mathfrak{X}_3 = E_1\dfrac{dr}{dx}\dfrac{dd'r^2}{dt^2}+E_2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dx'}{dt}+E_3\dfrac{d'r}{dt}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dd'[E(x-x')]}{dt^2}. \end{cases}$$

Die vorläufig unbestimmten Functionen B, B_1, ... der Entfernung r der zwei Theilchen bestimme ich durch folgende Sätze, von denen die drei ersten, im Wesentlichen auch von Herrn *Clausius* benutzten, Erfahrungsthatsachen ausdrücken, während der vierte das oben erwähnte Princip ausspricht.

1) Ein ruhender und constanter, geschlossener Strom übt auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen keine Kraft aus.

2) Für die ponderabeln Kräfte zweier geschlossenen Ströme gilt das *Ampère*sche Gesetz, wonach die bei einer beliebigen Bewegung des einen Stroms von diesen Kräften an demselben geleistete Arbeit gleich der negativen Aenderung des Potentials der beiden Ströme

$$P = \frac{4}{\varkappa^2}JJ'\int\int\frac{1}{r}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}ds\,ds'$$

ist, wo $\varkappa$ die Constante des *Weber*schen Grundgesetzes bedeutet.

3) Für die durch Bewegung und Intensitätsänderung auftretende elektromotorische Kraft eines geschlossenen Stromes auf einen andern gilt das *Neumann*sche Gesetz, wonach die von dieser Kraft an dem Strom bei der Strömungsbewegung geleistete Arbeit gleich der durch die Bewegung und Intensitätsänderung eintretenden Aenderung des Potentials der zwei Ströme ist.

4) Bei einer gemeinschaftlichen Bewegung zweier Stromelemente ist die zwischen ihnen wirkende Kraft dieselbe, als wenn sie ruhen. (Mit dem Ausdruck „gemeinschaftliche Bewegung“ bezeichne ich der Kürze halber eine solche Bewegung zweier Körper, bei welcher sich dieselben als ein unveränderlich verbundenes System bewegen.)

§. 2. Anwendung der Sätze 1) und 2).

Wir nehmen an, dass in einem Stromelement ds sich die positive Elektricitätsmenge $e = h\,ds$ mit der (für alle Stromelemente gleichen) Geschwindigkeit v, die negative $-e$ mit der Geschwindigkeit $-v_1$ bewegt; h', v', $-v_1'$ bezeichne dasselbe für das Stromelement ds', und die Stromintensitäten seien definirt durch die Gleichungen

$$J = h\frac{v+v_1}{2}, \quad J' = h'\frac{v'+v_1'}{2}.$$

Werden beide Stromelemente bewegt und ändern ihre Intensität, und bezeichnen $\frac{\delta}{dt}$ und $\frac{\delta'}{dt}$ die zeitlichen Differentialquotienten in Beziehung auf die Bewegung von ds und ds', so haben wir für die Theilchen $+e$, $+e'$ zu setzen

$$\frac{d}{dt} = v\frac{d}{ds} + \frac{\delta}{dt}, \quad \frac{d'}{dt} = v'\frac{d}{ds'} + \frac{\delta'}{dt},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\frac{d}{ds} + v^2\frac{d^2}{ds^2} + 2v\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta}{dt}\right) + \frac{\delta^2}{dt^2},$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots = v^2 + 2v\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{dt} + \cdots\right) + \left(\left(\frac{\delta x}{dt}\right)^2 + \cdots\right),$$

wodurch sich für die Summe der zwei Kräfte, welche die Elektricitätsmengen $+e'$ und $-e'$ des Stromelements ds' auf die Menge $+e$ des Stromelements ds ausüben, aus (1.) ergiebt

$$\mathfrak{X}_{\mp e', +e} = (\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3)_{\mp e', +e}$$

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} &= v(v'+v_1')\left[E_1\frac{dr}{dx}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'} + E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right] \\ &+ (v'+v_1')\Big\{\frac{d}{ds'}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right) + 2B_4\frac{d}{ds'}\left(\frac{\delta x'}{dt}\right) + B_5\left(\frac{dr}{ds'}\frac{\delta x'}{dt} + \frac{dx'}{ds'}\frac{\delta' r}{dt}\right) \\ &+ (x-x')\left[C_4\frac{dr}{ds'} + 2C_5\frac{d}{ds'}\left(\frac{\delta' r}{dt}\right) + 2C_6\frac{dr}{ds'}\frac{\delta' r}{dt} + 2C_7\left(\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta x'}{dt} + \cdots\right)\right. \\ &\left. + \frac{E_1}{r}\frac{d}{ds'}\left(\frac{\delta r^2}{dt}\right)\right] + E_2\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta r}{dt} + E_3\frac{dr}{ds'}\frac{\delta x}{dt} + \frac{d\delta}{ds'dt}(E(x-x'))\Big\} \\ &+ (v'^2 - v_1'^2)\left\{B_4\frac{d^2x'}{ds'^2} + B_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{ds'} + (x-x')\left[C_5\frac{d^2r}{ds'^2} + C_6\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + C_7\right]\right\} \\ &+ \frac{d(v'+v_1')}{dt}\left[B_4\frac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]. \end{aligned} \right.$$

Hiernach ist die Kraft eines ruhenden und constanten, geschlossenen Stroms s' auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen e

$$\frac{1}{v'+v'_1}\int \mathfrak{X}\,ds' = \int C_4(x-x')\frac{dr}{ds'}ds' + (v'-v'_1)\int\Big[B_4\frac{d^2x'}{ds'^2}+B_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{ds'}$$

$$+(x-x')\Big(C_5\frac{d^2r}{ds'^2}+C_6\Big(\frac{dr}{ds'}\Big)^2+C_7\Big)\Big]ds' = \int C_4(x-x')\frac{dr}{ds'}ds'$$

$$+(v'-v'_1)\int\Big\{\Big(B_5+C_5-\frac{dB_4}{dr}\Big)\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{ds'}+(x-x')\Big[\Big(C_6-\frac{dC_5}{dr}\Big)\Big(\frac{dr}{ds'}\Big)^2+C_7\Big]\Big\}ds',$$

und da nach Satz 1) diese beiden Integrale für einen **ganz beliebigen** Stromdraht einzeln $=0$ sein müssen, so muss man haben

$$(3.)\qquad C_4 = 0$$

und entweder

$$(4^a.)\qquad v' = v'_1$$

oder

$$(4^b.)\qquad C_5 = \frac{dB_4}{dr}-B_5,\quad C_6 = \frac{dC_5}{dr},\quad C_7 = 0.$$

Herr *Clausius* sieht sich zu den Annahmen ($4^b.$) genöthigt, da er $v'_1=0$ voraussetzt; es wird sich in §. 4 ergeben, dass dieselben dem Satz 4) widersprechen.

Nach (2.) ist ferner die ponderomotorische Kraft eines geschlossenen Stromes s' auf ds

$$\mathfrak{X} = hh'ds(v+v_1)(v'+v'_1)\int\Big(E_1\frac{dr}{dx}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}+E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\Big)ds';$$

also die Arbeit an dem geschlossenen Strom s bei einer durch $\frac{\delta}{dt}$ charakterisirten Bewegung desselben, da $\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta x}{dt}+\cdots = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds'}\Big(\frac{\delta r^2}{dt}\Big)$ ist,

$$A = \int\Big(\mathfrak{X}\frac{\delta x}{dt}+\cdots\Big)ds = 4JJ'\iint\Big(E_1\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}\frac{\delta r}{dt}-\tfrac{1}{2}E_2\frac{dr}{ds}\frac{d}{ds'}\Big(\frac{\delta r^2}{dt}\Big)\Big)ds\,ds'$$

$$= 4JJ'\iint\Big[\big(E_1+\tfrac{1}{2}E_2\big)\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}+r^2\frac{d}{dr}\Big(\frac{E_2}{r}\Big)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\Big]\frac{\delta r}{dt}ds\,ds'.$$

Nach Satz 2) soll nun

$$A = -\frac{\delta P}{dt} = -\frac{4}{\varkappa^2}JJ'\iint\frac{\delta}{dt}\Big(\frac{1}{r}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}\Big)ds\,ds'$$

sein; nun ist aber

$$\frac{1}{r}\frac{\delta}{dt}\Big(\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}\Big) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{ds\,ds'}\Big(\frac{\delta r^2}{dt}\Big) = \frac{d}{ds'}\Big(\frac{1}{r}\frac{d\delta r^2}{ds\,dt}\Big)-\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{d\delta r^2}{ds\,dt}$$

$$= \frac{d}{ds'}\Big(\frac{1}{r}\frac{d\delta r^2}{ds\,dt}\Big)-\frac{d}{ds}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{\delta r^2}{dt}\right)+\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}\frac{\delta r^2}{dt},$$

folglich

$$(5.)\quad \frac{\delta P}{dt} = \frac{4}{\varkappa^2} JJ' \int\!\!\int \left(-\frac{1}{r^2}\frac{d^2 r^2}{ds\,ds'} + 2r \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds\,ds'} \right) \frac{\delta r}{dt}\, ds\, ds'$$

$$= \frac{4}{\varkappa^2} JJ' \int\!\!\int \left(-\frac{2}{r^2}\frac{d^2 r^2}{ds\,ds'} + \frac{6}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} \right) \frac{\delta r}{dt}\, ds\, ds'.$$

Die Gleichung $A + \frac{\delta P}{dt} = 0$ geht also über in

$$(a.)\quad 0 = \int\!\!\int \left[\left(E_1 + \tfrac{1}{2} E_2 - \frac{2}{\varkappa^2 r^2} \right) \frac{d^2 r^2}{ds\,ds'} + \left(r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{E_2}{r}\right) + \frac{6}{\varkappa^2 r^2} \right) \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} \right] \frac{\delta r}{dt}\, ds\, ds'.$$

Nun hat Herr *Neumann* *) folgenden Satz bewiesen: „Sollen zwei Functionen φ, ψ von r so beschaffen sein, dass das über zwei starre Curven von beliebiger Gestalt und beliebiger Bewegung ausgedehnte Integral

$$\int\!\!\int \left(\varphi \frac{d^2 r^2}{ds\,ds'} + \psi \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} \right) \frac{\delta r}{dt}\, ds\, ds' = 0$$

ist, so müssen φ und ψ identisch verschwinden". Hiernach folgt aus $(a.)$

$$E_1 + \tfrac{1}{2} E_2 = \frac{2}{\varkappa^2 r^2}, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{E_2}{r}\right) = -\frac{6}{\varkappa^2 r^4},$$

woraus

$$(6.)\quad E_2 = \frac{2}{\varkappa^2 r^2}, \quad E_1 = \frac{1}{\varkappa^2 r^2}.$$

§. 3. Anwendung des Satzes 3).

Bezeichnet man mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ die sich aus (2.) ergebenden Kräfte auf $+e$ und $-e$, so kann man $\mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1}{2} + \frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_1}{2}$, $\mathfrak{X}_1 = \frac{\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1}{2} - \frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_1}{2}$ setzen, es ist also $\frac{\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1}{2}$ die ponderomotorische, $\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_1}{2}$ die elektromotorische Kraft auf das Theilchen $+e$. Hiernach ist die elektromotorische Kraft auf die positive Elektricität in ds gleich $eh'ds'E_x$, wo E_x durch die Gleichung (2.) gegeben ist, wenn man darin v durch $\frac{v-v_1}{2}$ ersetzt; also, wenn man $C_5 = \frac{dC_5'}{dr}$, $E_3 = \frac{dE_3}{dr}$ setzt und die Gleichungen (3.) und (6.) berücksichtigt,

---

*) Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. der Wissenschaften. 1873. pag. 440.

$$
(7.)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{E_x}{v'+v'_1} = \frac{d}{ds'}\Big\{ & B_3\frac{dr}{dx}+2B_4\frac{\delta x'}{dt}+2C_5(x-x')\frac{\delta' r}{dt}+\frac{x-x'}{\varkappa^2 r^2}\frac{\delta r^2}{dt} \\
& +E'_3\frac{\delta x}{dt}+\frac{\delta}{dt}(E(x-x'))+\frac{v-v_1}{2}\Big[E'_3\frac{dx}{ds}+\frac{d}{ds}(E(x-x'))\Big] \\
& +(v'-v'_1)\Big[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\Big]+\frac{1}{v'+v'_1}\frac{d(v'+v'_1)}{dt}C'_5(x-x')\Big\} \\
& +\Big(B_5-2\frac{dB_4}{dr}\Big)\frac{dr}{ds'}\frac{\delta x'}{dt}+\Big[(B_5+2C_5)\frac{dx'}{ds'}+2r\Big(C_6-\frac{dC_5}{dr}\Big)\frac{dr}{dx}\frac{dr}{ds'}\Big]\frac{\delta' r}{dt} \\
& +\frac{2}{\varkappa^2 r^2}\Big(2\frac{dx'}{ds'}+3\frac{dr}{dx}\frac{dr}{ds'}\Big)\frac{\delta r}{dt}+2rC_7\frac{dr}{dx}\Big(\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta x'}{dt}+\cdots\Big) \\
& +\frac{v-v_1}{2\varkappa^2 r^2}\Big(\frac{dr}{dx}\frac{d^2 r^2}{ds\,ds'}+2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\Big)+(v'-v'_1)\Big[\Big(-\frac{dB_4}{dr}+B_5+C_5\Big)\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{ds'} \\
& +\Big(C_6-\frac{dC_5}{dr}\Big)r\frac{dr}{dx}\Big(\frac{dr}{ds'}\Big)^2+rC_7\frac{dr}{dx}\Big]+\frac{1}{v'+v'_1}\frac{d(v'+v'_1)}{dt}(B_4+C'_5)\frac{dx'}{ds'}.
\end{aligned}\right.
$$

Berücksichtigt man die Gleichungen

$$\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\cdots=-\tfrac{1}{2}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'},\quad \frac{dx}{ds}\frac{\delta x'}{dt}+\cdots=-\tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big(\frac{\delta' r^2}{dt}\Big),$$

und setzt

$$(a.)\quad -B_5+2\frac{dB_4}{dr}=F,\quad \frac{1}{4r}\Big(C_6-\frac{dC_5}{dr}\Big)=\frac{dG}{dr},\quad rC_7=\frac{dC'_7}{dr},$$

so erhält man aus (7.) für die durch eh' dividirte elektromotorische Kraft eines geschlossenen Stroms s' nach ds

$$
(8.)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{v'+v'_1}\int E\,ds' = \int\Big\{ & \frac{F}{2}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{ds}\Big(\frac{\delta' r^2}{dt}\Big)-\Big[(\tfrac{1}{2}B_5+C_5)\frac{d^2r^2}{ds\,ds'} \\
& -2r\Big(C_6-\frac{dC_5}{dr}\Big)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\Big]\frac{\delta' r}{dt}+\frac{2}{\varkappa^2 r^2}\Big(-\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}+3\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\Big)\frac{\delta r}{dt} \\
& +2\frac{dC'_7}{ds}\Big(\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta x'}{dt}+\cdots\Big)+(v'-v'_1)\Big[\frac{d}{ds}\Big(G\Big(\frac{dr^2}{ds'}\Big)^2\Big) \\
& -\tfrac{1}{2}\Big(-\frac{dB_4}{dr}+B_5+C_5+8rG\Big)\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}+\frac{dC'_7}{ds}\Big] \\
& -\frac{1}{2(v'+v'_1)}\frac{d(v'+v'_1)}{dt}(B_4+C'_5)\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}\Big\}\,ds'.
\end{aligned}\right.
$$

Beachtet man nun, dass

$$F\frac{dr}{ds'}\frac{d}{ds}\Big(\frac{\delta' r^2}{dt}\Big)=\tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big(\frac{F}{r}\frac{dr^2}{ds'}\frac{\delta' r^2}{dt}\Big)-\Big[F\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}+2\Big(r\frac{dF}{dr}-F\Big)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\Big]\frac{\delta' r}{dt},$$

so erhält man für die von diesen Kräften an dem geschlossenen Strom s

bei der Strömung geleistete Arbeit

$$A = (v+v_1)hh'\iint E\,ds\,ds'$$

$$= 4JJ'\iint\Big\{\Big[-\Big(C_5+\frac{dB_4}{dr}\Big)\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}+\Big(F-r\frac{dF}{dr}+2rC_6-2r\frac{dC_5}{dr}\Big)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\Big]\frac{\delta' r}{dt}$$

$$+\frac{2}{x^2r^2}\Big(-\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}+3\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\Big)\frac{\delta r}{dt}-\tfrac{1}{2}(v'-v_1')\Big(-\frac{dB_4}{dr}+B_5+C_5+8rG\Big)\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}\Big\}\,ds\,ds'$$

$$-2J\frac{dJ'}{dt}\iint(B_4+C_5')\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}\,ds\,ds'.$$

Nach Satz 3) soll nun

$$A = \frac{\delta P}{dt}+\frac{\delta' P}{dt}+\frac{P}{J'}\frac{dJ'}{dt}$$

sein, d. h. nach (5.)

$$A = \frac{4}{x^2}JJ'\iint\Big(-\frac{2}{r^2}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}+\frac{6}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\Big)\Big(\frac{\delta r}{dt}+\frac{\delta' r}{dt}\Big)ds\,ds'+\frac{4}{x^2}J\frac{dJ'}{dt}\iint\frac{1}{r}\frac{d^2r^2}{ds\,ds'}\,ds\,ds',$$

nach dem in §. 2 erwähnten *Neumann*schen Satze muss man also haben

$$B_4+C_5' = -\frac{2}{x^2r},$$

also

$$(9.)\qquad C_5 = -\frac{dB_4}{dr}+\frac{2}{x^2r^2};$$

ferner

$$F-r\frac{dF}{dr}+2rC_6-2r\frac{dC_5}{dr} = \frac{6}{x^2r^2},$$

also

$$(10.)\qquad C_6 = \frac{1}{2r}\Big(-F+r\frac{dF}{dr}-2r\frac{d^2B_4}{dr^2}-\frac{2}{x^2r^2}\Big).$$

Endlich muss noch entweder $v'-v_1'=0$, oder

$$-\frac{dB_4}{dr}+B_5+C_5+8rG = 0$$

sein, welche letztere Gleichung aber durch die Gleichungen (9.) und (10.) schon erfüllt ist.

§. 4. Anwendung des Satzes 4).
Das ponderomotorische und elektromotorische Elementargesetz.

Die zwei Stromdrähte mögen eine gemeinschaftliche Bewegung haben, bei welcher jeder Punkt sich nach den Coordinatenaxen mit denselben Geschwindigkeiten ξ, η, ζ, deren Resultirende $\frac{d\sigma}{dt}$ sei, verschiebt und sich zugleich

um die Coordinatenaxen mit denselben Winkelgeschwindigkeiten α, β, γ dreht. Wir haben also zu setzen

$$(a.)\quad \begin{cases} \frac{\delta x}{dt} = \xi + \beta z - \gamma y, \quad \frac{\delta y}{dt} = \eta + \gamma x - \alpha z, \quad \frac{\delta z}{dt} = \zeta + \alpha y - \beta x, \\ \frac{\delta x'}{dt} = \xi + \beta z' - \gamma y', \quad \ldots \\ \frac{\delta r}{dt} = -\frac{\delta' r}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\frac{dr}{d\sigma} + \frac{\alpha}{r}(zy' - yz') + \frac{\beta}{r}(xz' - zx') + \frac{\gamma}{r}(yx' - xy'). \end{cases}$$

Durch die Gleichung $\delta r = -\delta' r$ und die Gleichungen (9.), (10.) und (a.) des §. 3 geht der von dieser Bewegung abhängige Theil von E_x nach (7.) über in

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{E_x}{v' + v'_1} = \frac{d}{ds'}\left[\left(2\frac{dB_4}{dr} + \frac{dE}{dr} - \frac{2}{x^2 r^2}\right) r \frac{dr}{dx}\frac{\delta r}{dt} + (E + E_3)\frac{\delta x}{dt} + 2B_4\frac{\delta x'}{dt}\right] \\ -\left[F\frac{dx'}{ds'} + \left(F - r\frac{dF}{dr}\right)\frac{dr}{dx}\frac{dr}{ds'}\right]\frac{\delta' r}{dt} - F\frac{dr}{ds'}\frac{\delta x'}{dt} + 2\frac{dC_7}{dx}\left(\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta x'}{dt} + \cdots\right) \\ = \frac{d\mathfrak{L}}{ds'} + \frac{d}{dx}\left[Fr\frac{dr}{ds'}\frac{\delta' r}{dt} + 2C_7\left(\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta x'}{dt} + \cdots\right)\right], \end{cases}$$

wo der eingeklammerte Ausdruck der ersten Zeile mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet ist. Mithin ist die Summe der elektromotorischen Kräfte nach ds, welche der geschlossene Strom s' auf einen ungeschlossenen Strom s ausübt,

$$\frac{1}{v' + v'_1}\iint E\, ds\, ds' = \int\left[Fr\frac{dr}{ds'}\frac{\delta' r}{dt} + 2C_7\left(\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta x'}{dt} + \cdots\right)\right]_1^2 ds'$$

wo $[\,]_1^2$ die Differenz der Werthe an den beiden Endpunkten des Stromes s bedeutet. Nach Satz 4) soll dieser Ausdruck $= 0$ sein, folglich muss das vorstehende Integral in einem beliebigen Punkt (x, y, z) und für eine beliebige Gestalt und Bewegung des Drahtes s' verschwinden; also, wenn man z. B. demselben blos eine Drehung um die x-Axe giebt, nach (a.)

$$\int F\frac{dr}{ds'}(zy' - yz')\, ds' + 2\int C'_7\left(z'\frac{dy'}{ds'} - y'\frac{dz'}{ds'}\right) ds' = 0.$$

Da diese Gleichung unabhängig von y und z stattfinden muss, so muss jedes der Integrale

$$\int F\frac{dr}{ds'}y'\, ds', \quad \int F\frac{dr}{ds'}z'\, ds', \quad \int C'_7\left(z'\frac{dy'}{ds'} - y'\frac{dz'}{ds'}\right) ds'$$

für sich $= 0$ sein, was, da die zu integrirenden Functionen keine Differentialquotienten nach s' sind, nur möglich ist, wenn $F = C'_7 = 0$ ist. Diese Gleichungen in Verbindung mit (9.) und (10.) geben

$$(b.)\quad B_5 = 2\frac{dB_4}{dr}, \quad C_5 = -\frac{dB_4}{dr} + \frac{2}{x^2 r^2}, \quad C_6 = -\frac{d^2 B_4}{dr^2} - \frac{1}{x^2 r^4}, \quad C_7 = 0.$$

Da die dritte dieser Gleichungen mit der einen der Gleichungen (4^b.), nämlich

$$C_6 = \frac{dC_5}{dr} = -\frac{d^2B_4}{dr^2} - \frac{4}{\varkappa^2 r^3}$$

in Widerspruch steht, so folgt, dass die Gleichung (4^a.) stattfinden muss, d. h. ***dass man die Geschwindigkeiten der beiden entgegengesetzten Elektricitäten in einem Strom als gleich und entgegengesetzt annehmen muss.***

Wir wollen jetzt den Satz 4) auch auf zwei Strom*elemente* anwenden. Nach diesem Satz muss, der Gleichung (11.) zufolge,

$$(12.)\qquad \frac{d}{ds'}\left[\left(2\frac{dB_4}{dr}+\frac{dE}{dr}-\frac{2}{\varkappa^2 r^2}\right)r\frac{dr}{dx}\frac{\delta r}{dt}+(E+E_3')\frac{\delta x}{dt}+2B_4\frac{\delta x'}{dt}\right] = 0$$

sein. Nehmen wir das Element ds als im Coordinatenanfang befindlich an und lassen beide Elemente sich um die Coordinatenaxen drehen, so ist $\frac{\delta x}{dt} = \frac{\delta r}{dt} = 0$, es muss also $\frac{d}{ds'}\left(B_4\frac{\delta x'}{dt}\right) = 0$ sein, d. h.

$$\beta\frac{d}{ds'}(B_4 z') - \gamma\frac{d}{ds'}(B_4 y') = 0,$$

was unabhängig von β und γ nicht möglich ist, wenn nicht

$$(13.)\qquad B_4 = 0$$

ist, wodurch die Gleichungen (b.) übergehen in

$$(14.)\qquad B_5 = 0,\quad C_5 = \frac{2}{\varkappa^2 r^2},\quad C_6 = -\frac{1}{\varkappa^2 r^3},\quad C_7 = 0.$$

Lassen wir ferner die zwei Stromelemente sich um die x-Axe drehen, so ist $\delta x = 0$, die Gleichung (12.) geht also über in

$$\frac{d}{ds'}\left[\left(\frac{dE}{dr}-\frac{2}{\varkappa^2 r^2}\right)r\frac{dr}{dx}\frac{\delta r}{dt}\right] = \frac{d}{ds'}\left[\left(\frac{dE}{dr}-\frac{2}{\varkappa^2 r^2}\right)\frac{dr}{dx}(zy'-yz')\right] = 0,$$

mithin, da dies unabhängig von y und z stattfinden muss,

$$\frac{dE}{dr} - \frac{2}{\varkappa^2 r^2} = 0,\quad \text{folglich auch}\quad \frac{d}{ds'}(E+E_3') = 0,$$

also

$$(15.)\qquad E = -\frac{2}{\varkappa^2 r},\quad E_3 = \frac{dE_3'}{dr} = -\frac{dE}{dr} = -\frac{2}{\varkappa^2 r^2}.$$

Durch die Gleichungen (3.), (5.), (6.), (13.), (14.), (15.) sind nun sämmtliche in den Ausdrücken (1.) für $\mathfrak{X}_2$ und $\mathfrak{X}_3$ enthaltenen Functionen mit Ausnahme von B_3 bestimmt, und diese Ausdrücke gehen über in

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{d'}{dt}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right)+\frac{1}{\varkappa^2 r^2}\frac{dr}{dx}\left[2r\frac{d'^2 r}{dt^2}-\left(\frac{d'r}{dt}\right)^2\right],$$

$$\mathfrak{X}_3 = \frac{2}{\varkappa^2}\left[\frac{1}{2r^2}\frac{dr}{dx}\frac{dd'r^2}{dt^2}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dx'}{dt}-\frac{1}{r^2}\frac{d'r}{dt}\frac{dx}{dt}-\frac{dd'}{dt^2}\left(\frac{x-x'}{r}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\varkappa^2 r^2}\frac{dr}{dx}\left(2r\frac{dd'r}{dt^2}-\frac{dr}{dt}\frac{d'r}{dt}\right).$$

Bezeichnen wir mit $\frac{Dr}{dt}=\frac{dr}{dt}+\frac{d'r}{dt}$ den ganzen Differentialquotienten von r bezüglich der Bewegung beider Elektricitätstheilchen, so wird

$$2r\frac{D^2 r}{dt^2}-\left(\frac{Dr}{dt}\right)^2=\left(2r\frac{d'^2 r}{dt^2}-\left(\frac{d'r}{dt}\right)^2\right)+2\left(2r\frac{dd'r}{dt^2}-\frac{dr}{dt}\frac{d'r}{dt}\right)+\left(2r\frac{d^2 r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)$$

und wir erhalten nach (1.) die ganze Kraft von e' auf $e = ee'\mathfrak{X}$, wo

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \frac{1}{\varkappa^2 r^2}\frac{dr}{dx}\left[2r\frac{D^2 r}{dt^2}-\left(\frac{Dr}{dt}\right)^2\right]+U, \\ U = \frac{d'}{dt}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right)+\mathfrak{X}_1-\frac{1}{\varkappa^2 r^2}\frac{dr}{dx}\left(2r\frac{d^2 r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) \\ \quad = \frac{d'}{dt}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right)+B\frac{dx}{dt}+B_1\frac{d^2 x}{dt^2}+B_2\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt} \\ \quad +r\frac{dr}{dx}\left[C\frac{dr}{dt}+\left(C_1-\frac{2}{\varkappa^2 r^2}\right)\frac{d^2 r}{dt^2}+\left(C_2+\frac{1}{\varkappa^2 r^3}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+C_3\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\cdots\right)\right]. \end{cases}$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks von $\mathfrak{X}$ ist das *Weber*sche Grundgesetz; von den Gliedern von U kommen in der Summe der zwei Kräfte, welche von der positiven und negativen Elektricität eines Stromelements ds' ausgeübt werden, alle mit Ausnahme des ersten zweimal mit entgegengesetztem Zeichen vor und fallen daher aus dieser Summe fort. Aus dem ersten Gliede von U aber entspringt eine von der Bewegung und Intensitätsänderung unabhängige elektromotorische Kraft eines ungeschlossenen Stroms s' auf ein Stromelement ds oder ein ruhendes Elektricitätstheilchen e, nämlich

$$K_x = 2eh'v'\int\frac{d}{ds'}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right)ds' = 2eJ'\left[B_3\frac{dr}{dx}\right]_1^2,$$

wo $[\,]_1^2$ die Differenz der Werthe an den zwei Endpunkten des Stroms s' bezeichnet; oder wenn wir mit e' die Menge freier positiver Elektricität an den Enden bezeichnen, also $J'=\frac{1}{2}\frac{de'}{dt}$ setzen,

$$(16.)\quad K_x = e\left[\frac{de'}{dt}B_3\frac{dr}{dx}\right]_1^2.$$

K_x besteht also aus zwei von den Stromenden ausgehenden und nach ihrer

Verbindungslinie mit dem Elektricitätstheilchen e gerichteten Kräften. Ob eine solche elektromotorische Kraft eines ruhenden Stromendes auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen, welche von der elektrostatischen Scheidungskraft der an dem Stromende aufgehäuften freien Elektricität e' verschieden ist, d. h. welche nicht dem jedesmaligen veränderlichen Werth von e', sondern der Geschwindigkeit seiner Aenderung $\frac{de'}{dt}$ proportional ist, wirklich existirt, scheint durch die bisherigen Erfahrungen noch nicht mit Sicherheit entschieden werden zu können; eine ähnliche ***ponderomotorische*** Kraft eines Stromendes, welche sich aus der *Helmholtz*schen Potentialtheorie ergiebt, ist durch, auf Veranlassung des Herrn *Helmholtz* selbst ausgeführte Versuche *) als nicht vorhanden nachgewiesen worden. Uebrigens werde ich im folgenden Paragraphen zeigen, dass, wenn die elektrodynamische Kraft zweier Elektricitätstheilchen dem Princip der Energie genügen soll, $B_3 = 0$ sein muss.

Hiernach hat die bisherige Untersuchung zu dem Resultat geführt, dass unter den in §. 1 gemachten Voraussetzungen ***die ponderomotorische und elektromotorische Wirkung zweier Stromelemente — abgesehen von einer etwa vorhandenen, durch die Gleichung*** (16.) ***bestimmten elektromotorischen Kraft eines Stromendes — nothwendig nach dem Weberschen Grundgesetz erfolgen muss.***

§. 5. Bestimmung der in U enthaltenen Functionen. Das elektrodynamische Grundgesetz.

Obwohl die Grösse U — mit Ausnahme des eben besprochenen ersten Gliedes — auf die Erscheinungen an galvanischen Strömen keinen Einfluss hat, so will ich doch die darin vorkommenden Functionen durch zwei Neben-Annahmen bestimmen, welche mir allerdings nicht denselben Grad von Sicherheit zu haben scheinen, wie die bisher benutzten. Zunächst will ich nach dem Vorgange des Herrn *Clausius* den Satz anwenden, ***dass eine ruhende Elektricitätsmenge auf einen ruhenden und constanten, geschlossenen Strom keine ponderomotorische und elektromotorische Kraft ausübt.*** Nach Gleichung (1.) ist die Kraft einer ruhenden Elektricitätsmenge e' auf die positive Elektricitätsmenge e des Stromelements ds, indem man $\frac{d}{dt} = v\frac{d}{ds}$

*) *Schiller, Pogg.* Ann. 159. — *Helmholtz,* Monatsberichte der Berliner Akademie, Juli 1874.

setzt,

$$(17.)\quad \mathfrak{X}_1 = v\left[B\frac{dx}{ds}+C\frac{dr}{ds}(x-x')\right]+v^2\left[B_1\frac{d^2x}{ds^2}+B_2\frac{dr}{ds}\frac{dx}{ds}\right.$$
$$\left.+(x-x')\left(C_1\frac{d^2r}{ds^2}+C_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+C_3\right)\right],$$

also die ponderomotorische Kraft

$$\frac{\mathfrak{X}_{10}}{2v} = B\frac{dx}{ds}+C\frac{dr}{ds}(x-x') = \frac{d}{ds}(B(x-x'))+\left(C-\frac{dB}{dr}\right)\frac{dr}{ds}(x-x').$$

Die von diesen Kräften an dem geschlossenen Strom s bei einer durch $\frac{\delta x}{dt}$, $\frac{\delta y}{dt}$, $\frac{\delta z}{dt}$ charakterisirten Bewegung geleistete Arbeit ist also

$$(a.)\quad A = \int\left[\frac{d}{ds}\left(Br\frac{dr}{dx}\right)+\left(C-\frac{dB}{dr}\right)r\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dx}\right]\frac{\delta x}{dt}ds+\cdots$$

Nimmt man nun zunächst eine parallele Verschiebung des Stroms s nach der x-Axe, setzt also $\frac{\delta x}{dt}=\xi$, $\frac{\delta y}{dt}=\frac{\delta z}{dt}=0$, so wird

$$A = \xi\int\left(C-\frac{dB}{dr}\right)r\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dx}ds,$$

und wenn dies für einen beliebigen Strom $=0$ sein soll, so muss man haben

$$C-\frac{dB}{dr} = 0.$$

Nimmt man ferner eine Drehung des Stroms um die x-Axe, setzt also nach §. 4, (a.) $\frac{\delta x}{dt}=0$, $\frac{\delta y}{dt}=-\alpha z$, $\frac{\delta z}{dt}=\alpha y$, so wird nach (a.)

$$A=\alpha\int\left[-z\frac{d}{ds}\left(Br\frac{dr}{dy}\right)+y\frac{d}{ds}\left(Br\frac{dr}{dz}\right)\right]ds=\alpha\int Br\left(\frac{dr}{dy}\frac{dz}{ds}-\frac{dr}{dz}\frac{dy}{ds}\right)ds$$

und wenn dies für einen beliebigen Strom $=0$ sein soll, so muss $B=0$ sein. Man erhält also

$$(18.)\quad B=C=0.$$

Die elektromotorische Kraft ist der mit v^2 multiplicirte Theil in (17.), die Summe ihrer Componenten nach ds ist also

$$E = v^2\int\left[B_2\frac{dr}{ds}+rC_1\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}+rC_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^3+rC_3\frac{dr}{ds}\right]ds$$
$$= v^2\int\left[\tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(rC_1\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right)+\left(rC_2-\tfrac{1}{2}\frac{d(rC_1)}{dr}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)^3\right]ds,$$

und wenn dies für einen beliebigen geschlossenen Strom $=0$ sein soll, so

muss man haben

$$(19.) \qquad C_2 = \frac{1}{2r}\frac{d(rC_1)}{dr}.$$

Vermöge der Gleichungen (18.) und (19.) wird, wenn man

$$rC_1 - \frac{2}{x^2 r} = M, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots = v^2$$

setzt,

$$(20.) \quad U = \frac{d'}{dt}\left(B_3 \frac{dr}{dx}\right) + \left[M\frac{d^2 r}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{dM}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + rC_3 v^2\right]\frac{dr}{dx} + B_1\frac{d^2 x}{dt^2} + B_2\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt}.$$

Zur Bestimmung der hierin noch übrigbleibenden Functionen will ich mit Herrn *Clausius* das Princip der Energie anwenden, nach welchem die Arbeit $A\,dt$, welche bei der Bewegung der zwei Elektricitätstheilchen von den zwischen ihnen wirkenden Kräften während der Zeit dt geleistet wird, ein auf beide Bewegungen bezügliches Differential nach der Zeit, also

$$A = \frac{dQ}{dt} + \frac{d'Q}{dt} = \frac{DQ}{dt}$$

sein muss. Der erste Theil von $\mathfrak{X}$ in (I.), das *Weber*sche Grundgesetz, genügt bekanntlich dieser Bedingung, für denselben ist nämlich

$$A = \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{r}\frac{D^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{Dr}{dt}\right)^2\right)\left(\frac{dr}{dx}\frac{dx}{dt} + \cdots + \frac{dr}{dx'}\frac{dx'}{dt} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{r}\frac{D^2 r}{dt} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{Dr}{dt}\right)^2\right)\frac{Dr}{dt} = \frac{1}{x^2}\frac{D}{dt}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{Dr}{dt}\right)^2\right].$$

Der von dem ersten Gliede von U herrührende Theil der Arbeit ist

$$\frac{d'}{dt}\left(B_3\frac{dr}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(B_3\frac{d'r}{dt}\right) = 2\frac{dd'K}{dt^2},$$

wenn $B_3 = \frac{dK}{dr}$ gesetzt wird.

Der von dem zweiten Gliede von U herrührende Theil der Arbeit ist

$$\left[M\frac{d^2 r}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{dM}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + rC_3 v^2\right]\frac{dr}{dt} + \left[M\frac{d'^2 r}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{dM}{dr}\left(\frac{d'r}{dt}\right)^2 + rC_3 v'^2\right]\frac{d'r}{dt}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{D}{dt}\left[M\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d'r}{dt}\right)^2\right)\right] - M\left(\frac{dr}{dt} + \frac{d'r}{dt}\right)\frac{dd'r}{dt^2}$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{dM}{dr}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\frac{d'r}{dt} + \left(\frac{d'r}{dt}\right)^2\frac{dr}{dt}\right] + rC_3\left(v^2\frac{dr}{dt} + v'^2\frac{d'r}{dt}\right).$$

Das dritte Glied von U giebt

$$B_1\left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} + \cdots + \frac{d'x}{dt}\frac{d'^2 x}{dt^2} + \cdots\right] = \frac{B_1}{2}\frac{D(v^2 + v'^2)}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{D}{dt}[B_1(v^2 + v'^2)]$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{dB_1}{dr}\left(\frac{dr}{dt} + \frac{d'r}{dt}\right)(v^2 + v'^2).$$

Das letzte Glied von U giebt

$$B_2\left(\frac{dr}{dt}v^2+\frac{d'r}{dt}v'^2\right).$$

Hiernach muss folgender Ausdruck ein totaler Differentialquotient nach t sein:

$$\frac{DF}{dt} = 2\frac{dd'K}{dt^2}-M\left(\frac{dr}{dt}+\frac{d'r}{dt}\right)\frac{dd'r}{dt^2}-\frac{1}{2}\frac{dM}{dr}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\frac{d'r}{dt}+\left(\frac{d'r}{dt}\right)^2\frac{dr}{dt}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dr}\left(\frac{dr}{dt}+\frac{d'r}{dt}\right)(v^2+v'^2)+(B_2+rC_3)\left(\frac{dr}{dt}v^2+\frac{d'r}{dt}v'^2\right),$$

oder, da $\frac{dr}{dt}=v\frac{dr}{ds}$, $\frac{d'r}{dt}=v'\frac{dr}{ds'}$ ist,

$$\frac{DF}{dt} = 2vv'\left(\frac{d^2K}{dr^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}+\frac{dK}{dr}\frac{d^2r}{dsds'}\right)+\left(v^3\frac{dr}{ds}+v'^3\frac{dr}{ds'}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dr}+B_2+rC_3\right)$$
$$-v^2v'\left[M\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{1}{2}\frac{dM}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\frac{dr}{ds'}+\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds'}\right]$$
$$-v'^2v\left[M\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{1}{2}\frac{dM}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2\frac{dr}{ds}+\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds}\right].$$

Da aber weder dieser Ausdruck noch irgend eines seiner Glieder ein Differentialquotient nach t sein kann, da er in den Grössen v, v' von höherem als dem ersten Grade ist, aber nicht $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dv'}{dt}$ enthält, so müssen seine einzelnen Glieder identisch $=0$ sein, also

$$\frac{d^2K}{dr^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}+\frac{dK}{dr}\frac{d^2r}{dsds'} = 0,$$

woraus $\frac{dK}{dr}=0$, d. h. $B_3=0$ folgt; ferner

$$-\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dr}+B_2+rC_3 = 0,$$
$$\left(M\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{1}{2}\frac{dM}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)\frac{dr}{ds'}+\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds} = 0,$$
$$\left(M\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{1}{2}\frac{dM}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)\frac{dr}{ds}+\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds'} = 0.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$\frac{dB_1}{dr}=0,\quad M\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{1}{2}\frac{dM}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}=0,\quad \text{also}\quad B_1=M=0.$$

Wir haben also folgende Gleichungen

$$(21.)\qquad B_3=B_1=M=B_2+rC_3=0,$$

wodurch der Werth von U übergeht in

$$(22.)\qquad U = B_2\left[\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt}-\frac{dr}{dx}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\cdots\right)\right].$$

Um schliesslich noch B_2 zu bestimmen, kann man das Princip 4) auf zwei in einem bewegten Leiter ruhende Elektricitätstheilchen e, e' anwenden; dieselben können dann keine andere als die elektrostatische Kraft auf einander ausüben, es muss also $U = 0$ sein, was, da der Ausdruck (22.) nur die Bewegung des Theilchens e enthält, nicht anders möglich ist, als wenn $B_2 = 0$ ist. Dadurch erhalten wir schliesslich

$$(23.) \qquad U = 0.$$

Ich will noch bemerken, dass die Anwendung des Satzes 4) auf zwei Elektricitätstheilchen genügt, um zu zeigen, dass sämmtliche in dem Ausdruck U der Gleichung (I.) vorkommenden Functionen verschwinden müssen, mit Ausnahme von C_3, dessen Verschwinden dann aus dem Princip der Energie folgt.

Das Resultat der Untersuchung ist also folgendes: *Aus den in* §. 1 *aufgestellten Haupt-Voraussetzungen folgt, dass die ponderomotorische und elektromotorische Wirkung zweier Stromelemente — abgesehen von einer etwaigen elektromotorischen Kraft eines Stromendes — nach dem Weberschen Grundgesetz erfolgen muss, sowie dass in einem galvanischen Strom beide Elektricitäten mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit fliessen; und mit Zuhülfenahme der im gegenwärtigen Paragraphen gemachten Neben-Annahmen ergiebt sich das Webersche Grundgesetz als das allein mögliche.*

Strassburg i. Els., Juli 1877.

Berichtigung.

Der in der letzten Zeile pag. 309 und in den vier ersten Zeilen pag. 310 enthaltene Passus ist in folgender Weise abzuändern:

ich glaube aber nachgewiesen zu haben, dass die Formeln des Herrn *Riecke* dem *Weber*schen Grundgesetz, wenn man dasselbe mit der Annahme von Molecularströmen verbindet, widersprechen; das in der zweiten Abhandlung der „Elektrodynamischen Maassbestimmungen" von Herrn *Weber* ausgesprochene Gesetz der Magnetinduction bezieht sich nur auf den Fall, wo ein Magnetpol verschoben, nicht auf den, wo er um eine durch ihn gehende Axe gedreht wird. Ich will die erwähnten Resultate im Nachstehenden kurz ableiten.

Ueber die *Kummer*sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen.

(Von Herrn *H. Weber* in Königsberg i. Pr.)

Das dritte Heft des 83. Bandes dieses Journals enthält zwei höchst interessante Abhandlungen der Herren *Cayley* und *Borchardt*, welche die Darstellung der *Kummer*schen Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten durch Thetafunctionen behandeln, deren Studium mir eine Untersuchung über die Charakteristiken der Thetafunctionen zweier Veränderlichen ins Gedächtniss rief, die ich schon vor längerer Zeit, freilich ohne jede Beziehung auf eine geometrische Anwendung angestellt habe. Die Ergebnisse derselben können aber in der vorliegenden Aufgabe mit Nutzen angewandt werden und führen zu einigen Resultaten, die mir nicht ohne Interesse zu sein scheinen.

Wir setzen, wenn

$$\varphi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

eine Function zweiten Grades bedeutet, deren reeller Theil wesentlich negativ ist,

$$\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{Bmatrix}(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} e^{\varphi\left(n_1+\frac{g_1}{2},\, n_2+\frac{g_2}{2}\right) + \left(n_1+\frac{g_1}{2}\right)(2v_1+h_1\pi i) + \left(n_2+\frac{g_2}{2}\right)(2v_2+h_2\pi i)} \text{ *)}.$$

Der Zahlencomplex $\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}$, der aus den Elementen 0, 1 gebildet

---

*) Nach der Bezeichnung von Herrn *Rosenhain* würde sein:

$$\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ 0\ 0 \end{Bmatrix}(v_1, v_2) = \varphi_{3-g_1, 3-g_2}(v_1, v_2), \quad \vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ 1\ 1 \end{Bmatrix}(v_1, v_2) = e^{(g_1+g_2)\frac{\pi i}{2}} \varphi_{g_1, g_2}(v_1, v_2),$$

$$\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ 1\ 0 \end{Bmatrix}(v_1, v_2) = e^{\frac{g_1 \pi i}{2}} \varphi_{g_1, 3-g_2}(v_1, v_2), \quad \vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ 0\ 1 \end{Bmatrix}(v_1, v_2) = e^{g_2 \frac{\pi i}{2}} \varphi_{3-g_1, g_2}(v_1, v_2).$$

werden kann, heisst die ***Charakteristik*** der Thetafunction und zugleich die Charakteristik des Systems halber Perioden

$$\tfrac{1}{2}(h_1\pi i+g_1 a_{11}+g_2 a_{12}), \quad \tfrac{1}{2}(h_2\pi i+g_1 a_{21}+g_2 a_{22})$$

und soll in der Folge öfter durch einen einzelnen in Klammern gesetzten Buchstaben bezeichnet werden. Die Charakteristiken werden unterschieden in ***gerade*** und ***ungerade***, je nachdem

$$g_1 h_1+g_2 h_2$$

gerade oder ungerade ist. Dem entsprechend sind auch die Thetafunctionen gerade oder ungerade Functionen ihrer Argumente. Die Anzahl sämmtlicher Charakteristiken beträgt sechzehn, darunter sechs ungerade und zehn gerade. Die ersteren sind

$$\binom{1\,0}{1\,0},\ \binom{1\,0}{1\,1},\ \binom{0\,1}{1\,1},\ \binom{0\,1}{0\,1},\ \binom{1\,1}{0\,1},\ \binom{1\,1}{1\,0}$$

und sollen, in einer beliebigen Reihenfolge genommen, mit

$$(\beta_1),\ (\beta_2),\ (\beta_3),\ (\beta_4),\ (\beta_5),\ (\beta_6)$$

bezeichnet werden.

Unter der Summe zweier Charakteristiken

$$(\varpi)=\binom{g_1\,g_2}{h_1\,h_2},\quad (\varpi')=\binom{g'_1\,g'_2}{h'_1\,h'_2}$$

verstehen wir die Charakteristik

$$(\varpi+\varpi') = \binom{g_1+g'_1,\ g_2+g'_2}{h_1+h'_1,\ h_2+h'_2},$$

und da die Elemente auf ihre Reste nach dem Modul 2 reducirt zu denken sind, so ist Summe und Differenz zweier Charakteristiken identisch. Die Summe zweier gleicher Charakteristiken ist $\binom{0\,0}{0\,0}$, wofür kurz (0) gesetzt werden soll.

Ueber diese Charakteristiken gelten nun die folgenden sehr einfachen Sätze, die alle ohne Weiteres aus dem ersten derselben folgen:

I. ***Die Summe sämmtlicher ungerader Charakteristiken***

$$(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6)$$

ist gleich (0).

Der Beweis ergiebt sich einfach durch Ausführung der Addition.

II. *Jede Charakteristik*, (0) *ausgenommen, lässt sich auf eine einzige Art als Summe zweier ungerader Charakteristiken darstellen.*

Hieraus folgt leicht

III. *Jede Charakteristik, mit Ausschluss von* (0), *lässt sich auf vier Arten in eine gerade und eine ungerade und auf drei Arten in zwei gerade Charakteristiken zerlegen.*

IV. *Die Summe dreier von einander verschiedener ungerader Charakteristiken ist stets eine gerade Charakteristik.*

V. *Jede gerade Charakteristik, einschliesslich* (0), *lässt sich auf zwei Arten in drei von einander verschiedene ungerade Charakteristiken zerlegen**).

Denn von den zwanzig möglichen Summen $(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$ sind dann und nur dann zwei einander gleich, wenn in beiden zusammengenommen alle sechs ungeraden Charakteristiken vorkommen. Beispielsweise ist:

$$(0) = \begin{pmatrix}1\,0\\1\,0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix}.$$

Auf Grund dieser wenigen Sätze über die Charakteristiken lässt sich die Frage nach der algebraischen Abhängigkeit der Thetafunctionen sehr einfach erledigen nach der Methode, die ich in den §§. 5, 6 meiner Schrift über die „Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3" angewandt habe.

Zunächst ergiebt sich aus allgemeinen Gründen, dass zwischen höchstens fünf Quadraten von Thetafunctionen eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten besteht.

Um diese Relationen aufzustellen, wählen wir drei beliebige ungerade Charakteristiken (β_1), (β_2), (β_3) und setzen $(\beta_1+\beta_2+\beta_3) = (\beta_0)$. Ferner sei (ϖ) eine beliebige Charakteristik und

$$(\beta_i) = \begin{pmatrix}\nu_1^{(i)}\,\nu_2^{(i)}\\ \mu_1^{(i)}\,\mu_2^{(i)}\end{pmatrix}_{i=0,1,2,3,4,5,6}, \quad (\varpi) = \begin{pmatrix}g_1\,g_2\\ h_1\,h_2\end{pmatrix}, \quad \Sigma\mu\nu = \mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2.$$

Dann ergiebt sich, wenn wir die Thetafunctionen, in denen die Argumente die Werthe Null haben, ohne Argumente schreiben:

$$(A.)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta^2|\beta_0|\,\vartheta^2|\varpi|(v_1, v_2)\\ &= (-1)^{\Sigma g(\mu^{(0)}+h)}\sum_{i=0}^{i=3}(-1)^{\Sigma(\nu^{(i)}\mu^{(0)}+\mu^{(i)}g)}\,\vartheta^2|\beta_0+\beta_i+\varpi|\,\vartheta^2|\beta_i|(v_1, v_2)\end{aligned}\right.$$

---

*) Das unten folgende Formelsystem (*E.*) kann zugleich als Tafel für diese Zerlegungen benutzt werden.

oder, in einer etwas anderen Form:

$$(A'.)\quad \vartheta^2\{\beta_0\}\,\vartheta^2\{\varpi\}(v_1, v_2) = (-1)^{\Sigma gh}\sum_{i=0}^{i=3}(-1)^{\Sigma(\nu^{(i)}\mu^{(0)}+\mu^{(i)}g)}\,\vartheta^2\{\varpi+\beta_i\}\,\vartheta^2\{\varpi+\beta_i\}(v_1, v_2).$$

Dadurch sind sämmtliche Thetaquadrate linear ausgedrückt durch vier unter ihnen. Es ist aber wichtig zu bemerken, dass auf der rechten Seite von $(A.)$ oder $(A'.)$ nur drei Glieder wirklich übrig bleiben, so dass schon zwischen vier Thetaquadraten eine lineare Relation besteht, denn von den vier Charakteristiken

$$(\varpi),\quad (\varpi+\beta_0+\beta_1),\quad (\varpi+\beta_0+\beta_2),\quad (\varpi+\beta_0+\beta_3)$$

ist, falls (ϖ) mit keiner der (β_0), (β_1), (β_2), (β_3) übereinstimmt, immer eine ungerade, während die drei übrigen gerade sind; und die ungeraden Thetafunctionen verschwinden zugleich mit ihren Argumenten.

Lässt man (ϖ) eine der ungeraden Charakteristiken bedeuten, so folgt hieraus, dass die sechs Thetaquadrate mit den Charakteristiken

$$(\beta_1),\quad (\beta_2),\quad (\beta_3),\quad (\beta_4),\quad (\beta_5),\quad (\beta_6)$$

die Eigenschaft haben, dass zwischen je vieren von ihnen eine lineare homogene Gleichung besteht. Nimmt man

$$(\varpi) = (\beta_1+\beta_2+\beta_4),\quad (\beta_1+\beta_2+\beta_5),\quad (\beta_1+\beta_2+\beta_6),$$

so erkennt man, dass dieselbe Eigenschaft den Systemen der Thetaquadrate mit den Charakteristiken

$$(\beta_1),\quad (\beta_2),\quad (\beta_1+\beta_2+\beta_3),\quad (\beta_1+\beta_2+\beta_4),\quad (\beta_1+\beta_2+\beta_5),\quad (\beta_1+\beta_2+\beta_6)$$

zukommt, und da man das Paar (β_1), (β_2) auf fünfzehn Arten auswählen kann, so ergeben sich im Ganzen sechzehn Systeme von sechs Thetaquadraten von der Beschaffenheit, dass zwischen je vieren von ihnen eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Diese sechzehn Systeme von Charakteristiken entstehen alle aus dem ersten derselben durch Hinzufügung einer bestimmten Charakteristik, $(\beta_1+\beta_2)$ für das oben aufgestellte zweite System. Es verschwinden daher alle Thetafunctionen des ersten Systems für die Nullwerthe der Argumente, alle Thetafunctionen des zweiten Systems für ein Paar halber Perioden mit der Charakteristik $(\beta_1+\beta_2)$, und so die übrigen. Demnach können diese sechzehn Systeme passend bezeichnet werden durch die Charakteristiken (0),

$(\beta_1+\beta_2)$, ... oder kürzer durch

(0), (12), (13), (14), (15), (16), (23), (24), (25), (26), (34), (35), (36), (45), (46), (56).

Es bestehen nun ferner, wie sich aus denselben Principien mit Leichtigkeit ergiebt, lineare homogene Gleichungen zwischen drei Producten von je zwei Thetafunctionen, deren Charakteristiken dieselben Summen haben. Man kann diese Relationen in der Form aufstellen:

$$(B.) \qquad 0=\sum_{i=1}^{i=3}(-1)^{\Sigma\mu^{(i)}\nu^{(0)}}\vartheta\{\beta_i+\beta_4+\beta_6\}\vartheta\{\beta_i+\beta_5+\beta_6\}\vartheta\{\beta_i+\beta_4+\beta_5\}(v_1,v_2)\vartheta\{\beta_i\}(v_1,v_2),$$

aus welcher man noch sieben andere ableiten kann, indem man die Variablen v_1, v_2 um halbe Periodensysteme vermehrt.*) Die Summe der Charakteristiken der beiden variablen Thetafunctionen in jedem Glied von (*B.*) ist $(\beta_4+\beta_5)$, und da man in gleicher Weise jedes Paar zu Grunde legen kann, so ergeben sich aus (*B.*) $8.15 = 120$ ähnliche Formeln. Mehr Formeln dieser Art kann es nicht geben, da jede von (0) verschiedene Charakteristik sich nur auf acht Arten in zwei andere zerlegen lässt, und da die drei Glieder einer solchen Relation entweder alle drei gerade oder alle drei ungerade Functionen sein müssen.

Aus (*A.*) und (*B.*) lassen sich die von *Göpel* entdeckten Relationen vierter Ordnung zwischen vier Thetafunctionen herleiten, welche Herr *Borchardt* in der Eingangs citirten Abhandlung benutzt hat. Für den vorliegenden Zweck aber können diese durch die Relationen (*A.*), (*B.*) vollständig ersetzt werden.

Wenn man in (*A.*) für die Variablen Systeme halber Perioden setzt, so ergeben sich die von Herrn *Rosenhain* gefundenen Relationen zwischen den Nullwerthen der Thetafunctionen, welche im Folgenden zusammengestellt sind.

$$(C.) \quad \begin{cases} \vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}-\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}=\vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}+\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}=\vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}+\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}, \\ \vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}-\vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}=\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}+\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}=\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}+\vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}, \\ \vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}-\vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}=\vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}+\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}=\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}+\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}, \end{cases}$$

*) Die den Formeln (*A.*), (*B.*) entsprechenden Relationen für die Thetafunctionen dreier Variablen finden sich auf Seite 35. 41, 42 meiner oben erwähnten Schrift über die *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3, woselbst auch die Ableitung, die hier genau dieselbe ist. ausführlich dargelegt ist.

$$
(D.)\quad\left\{\begin{array}{lll}
\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \vartheta^2\{0\}\;\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \vartheta^2\{0\}\;\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \vartheta^2\{0\}\;\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \vartheta^2\{0\}\;\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \vartheta^2\{0\}\;\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\{0\}\;\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \vartheta^2\{0\}\;\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\\
\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} & \vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right\} & = \vartheta^2\{0\}\;\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right\}+\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right\}.
\end{array}\right.
$$

In diesem letzten System ist jede Formel mit der Charakteristik bezeichnet, welche sich als Summe der Charakteristiken eines jeden Gliedes ergiebt.

Ausserdem bestehen noch Gleichungen, in welchen die Ableitungen der ungeraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente vorkommen. Bezeichnet man mit $\vartheta_1'\{\beta\}$, $\vartheta_2'\{\beta\}$ die Ableitungen der Function $\vartheta\{\beta\}(v_1, v_2)$ nach der ersten und zweiten Variablen für die Nullwerthe der Argumente und setzt zur Abkürzung

$$\vartheta_1'\{\beta_1\}\,\vartheta_2'\{\beta_2\} - \vartheta_1'\{\beta_2\}\,\vartheta_2'\{\beta_1\} = [\beta_1, \beta_2],$$

so lautet dieses Formelsystem:

$$
(E.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\binom{1\,0}{0\,0}\begin{bmatrix}1\,1 & 0\,1\\ 0\,1, & 0\,1\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\\
&\binom{0\,1}{0\,0}\begin{bmatrix}1\,0 & 1\,1\\ 1\,0, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\\
&\binom{1\,1}{0\,0}\begin{bmatrix}0\,1 & 1\,0\\ 1\,1, & 1\,1\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\\
&\binom{0\,0}{1\,0}\begin{bmatrix}0\,1 & 0\,1\\ 0\,1, & 1\,1\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}\\
&\binom{1\,0}{1\,0}\begin{bmatrix}1\,1 & 0\,1\\ 0\,1, & 1\,1\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\\
&\binom{0\,1}{1\,0}\begin{bmatrix}1\,1 & 1\,0\\ 0\,1, & 1\,1\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\\
&\binom{1\,1}{1\,0}\begin{bmatrix}0\,1 & 1\,0\\ 0\,1, & 1\,1\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}\\
&\binom{0\,0}{0\,1}\begin{bmatrix}1\,0 & 1\,0\\ 1\,1, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\\
&\binom{1\,0}{0\,1}\begin{bmatrix}0\,1 & 1\,1\\ 1\,1, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\\
&\binom{0\,1}{0\,1}\begin{bmatrix}1\,0 & 1\,1\\ 1\,1, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\\
&\binom{1\,1}{0\,1}\begin{bmatrix}0\,1 & 1\,0\\ 1\,1, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}.\\
&\binom{0\,0}{1\,1}\begin{bmatrix}1\,1 & 1\,1\\ 0\,1, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\\
&\binom{1\,0}{1\,1}\begin{bmatrix}0\,1 & 1\,1\\ 0\,1, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\\
&\binom{0\,1}{1\,1}\begin{bmatrix}1\,1 & 1\,0\\ 0\,1, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\\
&\binom{1\,1}{1\,1}\begin{bmatrix}0\,1 & 1\,0\\ 0\,1, & 1\,0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}.
\end{aligned}\right.
$$

Auch diese Formeln sind von Herrn *Rosenhain* gefunden, jedoch ohne Beweis mitgetheilt. Auch ist seitdem meines Wissens ein Beweis derselben nicht veröffentlicht worden. Die Ableitung, die, wie schon für die entsprechende Formel in der Theorie der elliptischen Functionen, nicht so ganz an der Oberfläche liegt, kann in der Weise geschehen, dass man zunächst mittelst (*B.*) die Proportionalität der rechten und linken Seiten nachweist, und dann mit Hülfe der Transformation zweiter Ordnung zeigt, dass ein Quotient wie

$$
\frac{\begin{bmatrix}1\,1 & 0\,1\\ 0\,1, & 0\,1\end{bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}}
$$

ungeändert bleibt, wenn die Moduln der Thetafunctionen verdoppelt werden.

Der Grenzübergang zu unendlich grossen Werthen der Moduln ergiebt dann für diesen Quotienten den Werth 1.

Setzt man in den Thetafunctionen für die Variablen v_1, v_2 hyperelliptische Integrale erster Gattung

$$v_1 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{(a_1-b_1 z)dz}{\sqrt{(1-\alpha_1 z)(1-\alpha_2 z)(1-\alpha_3 z)(1-\alpha_4 z)(1-\alpha_5 z)(1-\alpha_6 z)}}$$

$$v_2 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{(a_2-b_2 z)dz}{\sqrt{(1-\alpha_1 z)(1-\alpha_2 z)(1-\alpha_3 z)(1-\alpha_4 z)(1-\alpha_5 z)(1-\alpha_6 z)}},$$

indem man die Constanten a_1, b_1, a_2, b_2 und die Moduln der Thetafunctionen in bekannter Weise durch die Periodicitätsmoduln dieser Integrale bestimmt, so lassen sich die Quotienten zweier Thetafunctionen algebraisch durch die beiden Variablen z_1, z_2 ausdrücken. Diese Darstellung wird eine bestimmte, wenn man den Factoren der Wurzelgrösse die ungeraden Charakteristiken in beliebiger Weise zuordnet, etwa:

$$\sqrt{1-\alpha_1 z}\quad(\beta_1);\quad \sqrt{1-\alpha_2 z}\quad(\beta_2);\quad \sqrt{1-\alpha_3 z}\quad(\beta_3);$$
$$\sqrt{1-\alpha_4 z}\quad(\beta_4);\quad \sqrt{1-\alpha_5 z}\quad(\beta_5);\quad \sqrt{1-\alpha_6 z}\quad(\beta_6).$$

Für die ungeraden Thetafunctionen gelten dann die Relationen:

$$\sqrt{\frac{1-\alpha_1 z_1 . 1-\alpha_1 z_2}{1-\alpha_2 z_1 . 1-\alpha_2 z_2}} = c\frac{\vartheta\{\beta_1\}(v_1, v_2)}{\vartheta\{\beta_2\}(v_1, v_2)},$$

worin die Constante c leicht bestimmt werden kann. Indessen gehen wir hier nicht weiter darauf ein.

Lässt man in diesen Formeln z_1 mit z_2 zusammenfallen, so erhält man Gleichungen von folgender Form:

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} = \frac{[\beta_1, \beta_2].[\beta_3, \beta_4]}{[\beta_1, \beta_3].[\beta_2, \beta_4]},\quad \frac{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} = \frac{[\beta_1, \beta_4].[\beta_2, \beta_3]}{[\beta_1, \beta_3].[\beta_2, \beta_4]},$$

wofür sich nach dem System (*E.*) auch schreiben lässt,

$$(F.)\quad \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} = \pm\dfrac{\vartheta^2\{\beta_1+\beta_2+\beta_5\}\vartheta^2\{\beta_1+\beta_2+\beta_6\}}{\vartheta^2\{\beta_1+\beta_3+\beta_5\}\vartheta^2\{\beta_1+\beta_3+\beta_6\}}, \\ \dfrac{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} = \pm\dfrac{\vartheta^2\{\beta_1+\beta_4+\beta_5\}\vartheta^2\{\beta_1+\beta_4+\beta_6\}}{\vartheta^2\{\beta_1+\beta_3+\beta_5\}\vartheta^2\{\beta_1+\beta_3+\beta_6\}}. \end{cases}$$

Die Vorzeichen, für die sich leicht ein allgemeiner Ausdruck aufstellen lässt, ergeben sich für eine besondere Annahme über die (β) leichter aus den Formeln (*D.*), da die linken Seiten der beiden Gleichungen (*F.*)

die Summe 1 ergeben. Für die Annahme:

$$(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \beta_6) = \left(\begin{smallmatrix}1\,0\\1\,0\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\,0\\1\,1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}0\,1\\1\,1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}0\,1\\0\,1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\,1\\0\,1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\,1\\1\,0\end{smallmatrix}\right)$$

findet sich:

$$\binom{0\,0}{1\,1}\quad \frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} = \frac{\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1\,1\\0\,0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}1\,1\\1\,1\end{smallmatrix}\right\}}{\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0\,0\\1\,1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0\,0\\0\,0\end{smallmatrix}\right\}};\qquad \frac{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} = \frac{\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0\,0\\1\,0\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0\,0\\0\,1\end{smallmatrix}\right\}}{\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0\,0\\1\,1\end{smallmatrix}\right\}\vartheta^2\left\{\begin{smallmatrix}0\,0\\0\,0\end{smallmatrix}\right\}}$$

und vierzehn ähnliche Formelpaare. In jedem dieser Formelpaare ist die Summe der Charakteristiken der beiden in einem Product vorkommenden Thetafunctionen dieselbe, und diese Summe kann als Bezeichnung des Formelpaares dienen. Sollen bei der hier gemachten Annahme über die (β) die Moduln der Thetafunctionen und die Grössen $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6$ reell sein, so müssen die letzteren der Grösse nach in der Reihenfolge ihrer Indices cyklisch aufeinander folgen. Drei der Grössen α können beliebig, z. B. 0, 1, ∞ angenommen werden, und es lässt sich auf mehrfache Weise einrichten, dass die übrigen positive echte Brüche werden. Man erhält so unter anderen auch die von Herrn *Rosenhain* aufgestellten Formeln.

Aus (*F.*) ergeben sich noch leicht Ausdrücke für die Quotienten der Nullwerthe zweier geraden Thetafunctionen:

$$(G.)\qquad \frac{\vartheta^4\{\beta_1+\beta_2+\beta_3\}}{\vartheta^4\{\beta_1+\beta_2+\beta_4\}} = \frac{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)(\alpha_4-\alpha_6)}{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_6)}.$$

Man erhält hieraus, wenn man den Nenner festhält, neun Formeln, von denen eine nach der obigen Annahme über die (β) so lautet:

$$\frac{\vartheta^4\left\{\begin{smallmatrix}1\,1\\0\,0\end{smallmatrix}\right\}}{\vartheta^4\{0\}} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_6)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_6)(\alpha_3-\alpha_5)}.$$

Wir setzen nun irgend vier linear unabhängige von den Quadraten der Thetafunctionen gleich (oder proportional) den homogenen (Tetraeder-) Coordinaten eines Punktes im Raum, wodurch, da die Coordinaten eines Punktes durch zwei unabhängige Variable ausgedrückt sind, eine Fläche dargestellt ist. Jedem Werthsystem der Variablen v_1, v_2 entspricht ein bestimmter Punkt dieser Fläche, und zwar allen Werthen, die sich um Periodensysteme unterscheiden, derselbe Punkt. Jede Thetafunction, gleich Null gesetzt, stellt eine Ebene in Verbindung mit dieser Fläche dar, weil zwischen fünf Thetaquadraten immer eine lineare homogene Gleichung besteht.

Die Gleichung dieser Fläche erhalten wir sofort aus den Relationen (*B.*) in Verbindung mit (*A.*) und zwar in 120 analogen Formen, von denen wir eine eingehender betrachten.

Macht man in (*B.*) die Annahme

$$(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \beta_6) = \begin{pmatrix}10 & 10 & 01 & 01 & 11 & 11\\ 10, & 11, & 11, & 01, & 01, & 10\end{pmatrix},$$

und setzt

$$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\1&0\end{Bmatrix}(v_1,\ v_2) = \frac{p\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}},\quad \vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&1\end{Bmatrix}(v_1,\ v_2) = \frac{r\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&1\\1&1\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}1&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}},$$

$$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\1&1\end{Bmatrix}(v_1,\ v_2) = \frac{q\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}},\quad \vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&0\end{Bmatrix}(v_1,\ v_2) = s,$$

worin p, q, r, s homogene Punktcoordinaten bedeuten, so erhält man die Gleichungsform:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{p\left(s\frac{\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}}{\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&1\\1&1\end{Bmatrix}} - q\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}} + r\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}1&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}}\right)}\\ &+\sqrt{q\left(s\frac{\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}}{\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&1\\1&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}} - p\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}} + r\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}1&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}}\right)}\\ &+\sqrt{r\left(s\frac{\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&1\\1&1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}}{\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}} - p\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}1&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}} + q\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}1&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}}\right)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach überein mit derjenigen, welche Herr *Kummer* für die von ihm zuerst untersuchte Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten gegeben hat*). Die *Kummer*sche Form der Gleichung kann nämlich, wenn man die Variablen p, q, r, s mit geeigneten constanten Factoren multiplicirt annimmt, so dargestellt werden:

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{p\left(\delta s+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha'}}q+\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha''}}r\right)}+\sqrt{q\left(\delta' s+\sqrt{\frac{\alpha'}{\beta}}p+\sqrt{\frac{\gamma'}{\beta''}}r\right)}\\ &\qquad+\sqrt{r\left(\delta'' s+\sqrt{\frac{\alpha''}{\gamma}}p+\sqrt{\frac{\beta''}{\gamma'}}q\right)} = 0, \end{aligned}\right.$$

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1864. p. 252.

so dass dieselbe ausser den Grössen δ, δ', δ'' nur noch die drei Verhältnisse $\gamma':\beta''$, $\alpha'':\gamma$, $\beta:\alpha'$ enthält, zwischen welchen die linearen Relationen

$$(3.)\qquad \frac{\alpha'}{\beta}+\frac{\alpha''}{\gamma}=1,\quad \frac{\gamma'}{\beta''}+\frac{\gamma}{\alpha''}=1$$

bestehen. Da man s auch noch mit einem willkürlichen constanten Factor multiplicirt annehmen kann, so kommen in dieser Gleichungsform nur drei Constanten explicite vor. Um also (1.) und (2.) in Uebereinstimmung zu bringen, haben wir zu setzen:

$$(4.)\qquad \frac{\gamma'}{\beta''}=\frac{\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}}{\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}},\quad \frac{\alpha''}{\gamma}=-\frac{\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}}{\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}},\quad \frac{\beta}{\alpha'}=\frac{\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}}{\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}},$$

wodurch die Relationen (3.) befriedigt werden, ferner:

$$(5.)\qquad \frac{\delta'}{\delta}=-i\frac{\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,1\end{Bmatrix}}{\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}}\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}},\quad \frac{\delta''}{\delta}=-\frac{\vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}}{\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix}}\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}}{\vartheta\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}}.$$

Drückt man mit Hülfe von (*F.*) und (*G.*) die constanten Werthe der Thetafunctionen durch die algebraischen Moduln aus, indem man zur Vereinfachung

$$\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 & \text{gleich}\\ \infty, & 0, & \varkappa_1^2, & \varkappa_2^2, & \varkappa_3^2, & 1 & \end{matrix}$$

und

$$\varkappa_1'^2=1-\varkappa_1^2,\quad \varkappa_2'^2=1-\varkappa_2^2,\quad \varkappa_3'^2=1-\varkappa_3^2,$$

$$\varkappa_{32}^2=\varkappa_3^2-\varkappa_2^2,\quad \varkappa_{31}^2=\varkappa_3^2-\varkappa_1^2,\quad \varkappa_{21}^2=\varkappa_2^2-\varkappa_1^2$$

setzt, so folgt:

$$\frac{\gamma'}{\beta''}=\frac{1}{\varkappa_1'^2},\quad \frac{\alpha''}{\gamma}=-\frac{\varkappa_1'^2}{\varkappa_1^2},\quad \frac{\beta}{\alpha'}=\varkappa_1^2,$$

$$\frac{\delta'}{\delta}=\frac{i}{\varkappa_1}\frac{\varkappa_2^2\varkappa_3^2}{\varkappa_1^2},\quad \frac{\delta''}{\delta}=\frac{\varkappa_1'}{\varkappa_1}\cdot\frac{\varkappa_{21}^2\varkappa_{31}^2}{\varkappa_1^2\varkappa_1'^2},$$

woraus hervorgeht, dass, wie schon Herr *Borchardt* gezeigt hat, die durch Thetafunctionen dargestellte Fläche denselben Grad der Allgemeinheit hat, wie die von Herrn *Kummer* untersuchte Fläche, d. h. dass sie die allgemeinste Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten ist.

Aus der soeben entwickelten Gleichungsform und den in (*B.*) enthaltenen analogen Formen, geht sofort hervor, dass jede der sechzehn Thetafunctionen, gleich Null gesetzt, eine singuläre Tangentialebene der Fläche darstellt, welche dieselbe längs einem Kegelschnitt berührt. Wir bezeichnen diese sechzehn singulären Tangentialebenen durch die Charak-

teristiken der in ihnen verschwindenden Thetafunctionen, oder, indem wir (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6) die. ungeraden Charakteristiken bedeuten lassen, abgekürzt durch

(1), (2), (3), (4), (5), (6), (123), (124), (125), (126),
(134), (135), (136), (145), (146), (156),

wo (1), (123) etc. für (β_1), $(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$ etc. steht, so dass (123) und (456) dasselbe bedeutet.

In Folge der Formeln (*A.*) gehen sechzehn mal je sechs von diesen Ebenen durch einen Punkt. Diese Punkte sind bestimmt durch die sechzehn Systeme zusammengehöriger halber Perioden, für welche die betreffenden sechs Thetafunctionen verschwinden. Wir bezeichnen dieselben also durch die Charakteristiken der halben Periodensysteme, welche für die Variablen in jedem dieser Punkte zu setzen sind, und zwar, indem wir jede derselben aus zwei ungeraden Charakteristiken zusammensetzen, abgekürzt durch

(0), (12), (13), (14), (15), (16), (23), (24), (25), (26),
(34), (35), (36), (45), (46), (56),

wo $(i\varkappa)$ für $(\beta_i+\beta_\varkappa)$ steht. Diese sind, wie gleich gezeigt werden soll, die sechzehn Knotenpunkte der Fläche, von denen je sechs auf einer singulären Tangentialebene liegen. Diese Bezeichnung hat den Vortheil, dass sie sogleich erkennen lässt, welche Knotenpunkte auf einer bestimmten singulären Tangentialebene liegen, und welche von diesen Ebenen durch einen bestimmten Knotenpunkt gehen. Ein Knotenpunkt liegt auf einer singulären Tangentialebene oder nicht, je nachdem die Summe der Charakteristiken von Punkt und Ebene ungerade oder gerade ist.

Demnach enthält
die Ebene (1) die Punkte (0), (12), (13), (14), (15), (16),
die Ebene (123) = (456) die Punkte (23), (31), (12), (56), (64), (45);
durch den Punkt (0) gehen die Ebenen (1), (2), (3), (4), (5), (6),
durch den Punkt (12) gehen die Ebenen (1), (2), (123), (124), (125), (126),
womit die gegenseitigen Lagenverhältnisse vollständig ausgedrückt sind *).

*) Um die Bezeichnung von Herrn *Kummer* (Ueber die algebraischen Strahlensysteme Seite 66, Abhandlungen der Berliner Akademie 1866) mit dieser in Einklang zu bringen, hätte man Knotenpunkte und singuläre Tangentialebenen folgendermassen mit Nummern zu bezeichnen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	(12)	(13)	(23)	(45)	(63)	(62)	(61)	(65)	(34)	(24)	(14)	(64)	(35)	(25)	(15)
(6)	(126)	(136)	(145)	(123)	(3)	(2)	(1)	(5)	(125)	(135)	(146)	(4)	(124)	(134)	(156)

Es lässt sich nun die Gleichung des Tangentenkegels in einem beliebigen der sechzehn singulären Punkte in der folgenden eleganten Form darstellen, womit zugleich die Natur dieser Punkte als Knotenpunkte dargethan ist.

Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Gleichungen dreier, in einem solchen Punkt zusammenstossenden singulären Tangentialebenen, für den Punkt mit der Charakteristik (ϖ) etwa

$$\sqrt{x_1} = \vartheta\{\beta_1 + \varpi\}(v_1, v_2), \quad \sqrt{x_2} = \vartheta\{\beta_2 + \varpi\}(v_1, v_2), \quad \sqrt{x_3} = \vartheta\{\beta_3 + \varpi\}(v_1, v_2),$$

so ergiebt sich für Werthe von v_1, v_2, die sich von dem halben Periodensystem (ϖ) unendlich wenig unterscheiden, wenn man mit dv_1, dv_2 die unendlich kleinen Unterschiede der Variablen und des halben Periodensystems bezeichnet:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} &= \vartheta'_1\{\beta_1\}dv_1 + \vartheta'_2\{\beta_1\}dv_2, \\ \sqrt{x_2} &= \vartheta'_1\{\beta_2\}dv_1 + \vartheta'_2\{\beta_2\}dv_2, \\ \sqrt{x_3} &= \vartheta'_1\{\beta_3\}dv_1 + \vartheta'_2\{\beta_3\}dv_2 \end{aligned}$$

und daraus durch Elimination von dv_1, dv_2 die Gleichung des gesuchten Tangentenkegels zweiter Ordnung:

$$[\beta_2, \beta_3]\sqrt{x_1} + [\beta_3, \beta_1]\sqrt{x_2} + [\beta_1, \beta_2]\sqrt{x_3} = 0,$$

welche man noch mittelst des Formelsystems (*E.*) vereinfachen kann, so dass die Coefficienten durch die geraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente ausgedrückt sind.

Wir gehen nun dazu über, die Lagenverhältnisse der Knotenpunkte etwas genauer zu untersuchen, und bemerken vorweg, dass man allen den betreffenden Sätzen ihr reciprokes Gegenstück bezüglich der singulären Tangentialebenen an die Seite stellen kann, da die reciproke Polare unserer Fläche eine Fläche gleicher Art ist.

1. Durch irgend *zwei* Knotenpunkte gehen *zwei* singuläre Tangentialebenen, nämlich

durch	(0), (12)	die beiden Ebenen	(1),	(2)
-	(12), (13)	- - -	(1),	(123)
-	(12), (34)	- - -	(125),	(126).

2. Die Systeme von drei Knotenpunkten zerfallen in zwei Klassen, je nachdem die durch ein solches bestimmte Ebene eine singuläre Tan-

gentialebene ist oder nicht. Aus unserer Bezeichnung ergeben sich unmittelbar diese beiden Arten von Systemen. Die Anzahl der Systeme der ersten Art ist 320, die der zweiten 240.

3. Die Systeme von vier Knotenpunkten, die nicht in einer singulären Tangentialebene liegen, die wir mit den vier durch sie bestimmten Ebenen kurz als Tetraeder bezeichnen wollen, zerfallen in drei Klassen.

a) Tetraeder der ersten Art, deren vier Ebenen singuläre Tangentialebenen sind.

Gehen wir von einem beliebigen System von drei Punkten in einer singulären Tangentialebene aus, etwa von (0), (12), (13), so ist der vierte Punkt, welcher mit je zweien von diesen in einer singulären Tangentialebene liegt, völlig bestimmt, nämlich (23), und aus der Bezeichnung eines solchen Tetraeders

$$(0),\quad (12),\quad (13),\quad (23)$$

erhält man die der übrigen durch Vertauschung der Ziffern und durch Hinzufügung einer beliebigen Charakteristik. Die Summe der Charakteristiken der vier Eckpunkte eines solchen Tetraeders ist stets $=(0)$; die Anzahl derselben beträgt $\frac{320}{4}=80$.

b) Tetraeder der zweiten Art nennen wir solche, welche gar keine singuläre Tangentialebene enthalten.

Gehen wir von einem beliebigen System von drei Punkten aus, welches nicht in einer singulären Tangentialebene liegt, etwa von (0), (12), (34), so ist der vierte Punkt eines solchen Tetraeders gleichfalls völlig bestimmt, nämlich (56). Auch hier ist die Summe der Charakteristiken $=(0)$. Die Anzahl dieser Tetraeder beträgt $\frac{240}{4}=60$.

c) Alle übrigen Tetraeder, deren Zahl 1440 beträgt, bezeichnen wir als *Tetraeder der dritten Art.* Um ihre Eigenschaften zu untersuchen, können wir ausgehen von einem System von drei Punkten (0), (12), (13) und können einen vierten Punkt in einer der beiden Formen hinzufügen (24) oder (45). Beide Annahmen zeigen, dass zwei der Ebenen eines solchen Tetraeders singuläre Tangentialebenen sind, die beiden andern nicht. Die Summen der Charakteristiken der vier Punkte ist nicht $=(0)$.

Da eine Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten durch achtzehn Bedingungen bestimmt ist, so können sechs von den Knotenpunkten, falls dieselben von einander unabhängig sind, beliebig gegebene sein, und die Fläche kann durch dieselben bestimmt werden. Es ist aber dazu nicht jedes

beliebige System von sechs Knotenpunkten geeignet. Es ist daher erforderlich, die verschiedenen Systeme von sechs Knotenpunkten hinsichtlich ihrer projectivischen Abhängigkeit zu untersuchen.

Betrachten wir zu dem Ende zunächst ein Tetraeder der ersten Art:

(0), (12), (13), (23)

und stellen die Bezeichnungen der vier Ebenen desselben mit den Punkten, welche sie enthalten, zusammen:

(1)	enthält die Punkte	(0)(12)(13)	(14)(15)(16),
(2)	- - -	(0)(21)(23)	(24)(25)(26),
(3)	- - -	(0)(31)(32)	(34)(35)(36),
(123)	- - -	(23)(31)(12)	(56)(64)(45),

so ersehen wir daraus, *dass in den vier Ebenen eines Tetraeders der ersten Art alle sechzehn Knotenpunkte enthalten sind.*

Legen wir ferner ein Tetraeder der zweiten Art zu Grunde

(0), (12), (34), (56),

so enthält, im Allgemeinen wenigstens, keine der Ebenen desselben einen weiteren Knotenpunkt. Fügen wir einen beliebigen fünften Knotenpunkt (13) hinzu, so können wir durch diesen und durch je zwei der Fundamentalpunkte sechs Ebenen legen, von denen vier singuläre Tangentialebenen sind, die beiden andern nicht. Die letzteren sind die Ebenen durch die Punkte

(0), (56), (13) und (12), (34), (13),

während die vier ersteren mit den in ihnen enthaltenen Knotenpunkten folgende Bezeichnung haben:

(1)	mit den Knotenpunkten	(0)(12)(13)	(14)(15)(16),
(3)	- - - -	(0)(34)(13)	(32)(35)(36),
(123)	- - - -	(12)(56)(13)	(23)(45)(46),
(134)	- - - -	(56)(34)(13)	(14)(25)(26).

Diese vier Ebenen enthalten die beiden Knotenpunkte (14), (23) zweimal, während sie den einen (24) gar nicht enthalten. Die Punkte (13), (24), (14), (23) bilden wieder ein Tetraeder der zweiten Art, und so erkennt man, *dass sich die sechzehn Knotenpunkte der Fläche in vier Tetraeder der zweiten Art zusammenfassen lassen, von denen jedes die drei übrigen vollständig bestimmt:*

$$\begin{array}{c}(0)(12)(34)(56),\\ (13)(24)(14)(23),\\ (15)(26)(16)(25),\\ (35)(46)(36)(45),\end{array}$$

und zwar ist diese Anordnung auf fünfzehn verschiedene Arten möglich.

Obgleich nun also von den sechs Punkten

$$(0),\quad (12),\quad (34),\quad (56),\quad (13),\quad (24)$$

keine vier in einer Ebene liegen, so sind dieselben doch nicht projectivisch unabhängig, wie aus der folgenden Betrachtung erhellt. Wir legen das Tetraeder der zweiten Art (0), (12), (34), (56) als Coordinaten-Tetraeder zu Grunde, indem wir über die (β) dieselbe specielle Annahme machen, wie oben

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6) = \begin{pmatrix}10 & 10 & 01 & 01 & 11 & 11\\ 10, & 11, & 11, & 01, & 01, & 10\end{pmatrix},$$

so dass die Eckpunkte des Coordinaten-Tetraeders die Charakteristiken haben:

$$(0),\quad \begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}.$$

Setzt man dann

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\1\,0\end{Bmatrix}(v_1, v_2) - \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\1\,1\end{Bmatrix}(v_1, v_2),\\
\xi_2 &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\1\,0\end{Bmatrix}(v_1, v_2) - \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\1\,1\end{Bmatrix}(v_1, v_2),\\
\xi_3 &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,1\end{Bmatrix}(v_1, v_2) - \vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,1\end{Bmatrix}(v_1, v_2),\\
\xi_4 &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,1\end{Bmatrix}(v_1, v_2) - \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,0\end{Bmatrix}(v_1, v_2),
\end{aligned}$$

so sind $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ die Gleichungen der Seitenflächen des Coordinaten-Tetraeders, und für die Coordinaten der Punkte (13), (24), welche die Charakteristiken haben $\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix}$, ergeben sich die Werthe:

$$\text{für (13)}\ \left\{\begin{aligned}
\xi_1' &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}, & \xi_2' &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix},\\
\xi_3' &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}, & \xi_4' &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix},
\end{aligned}\right.$$

$$\text{für (24)}\ \left\{\begin{aligned}
\xi_1'' &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}, & \xi_2'' &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix},\\
\xi_3'' &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}, & \xi_4'' &= \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix},
\end{aligned}\right.$$

also:

$$\xi_1' = \xi_4'', \quad \xi_1'' = \xi_4', \quad \xi_2' = \xi_3'', \quad \xi_3' = \xi_2''$$

oder

$$\xi_1' \xi_4' \xi_2'' \xi_3'' - \xi_1'' \xi_4'' \xi_2' \xi_3' = 0;$$

diese Gleichung besagt, dass die zwei Punkte (13), (24) auf einem durch die geraden Linien

$$(0)(12); \quad (12)(56); \quad (56)(34); \quad (34)(0)$$

hindurchgehenden Hyperboloid liegen müssen, dass sonach diese Punkte nicht ganz beliebig gewählt werden können. Genügen die sechs Punkte (0), (12), (34), (56), (13), (24) dieser Bedingung, so bestimmen dieselben als Knotenpunkte nicht vollständig unsere Fläche, sondern lassen eine Constante unbestimmt.

Hieraus geht also hervor, dass sechs Knotenpunkte, welche nicht in einer projectivischen Abhängigkeit stehen, die Eigenschaft haben müssen, ***dass je vier von ihnen ein Tetraeder der dritten Art bilden.***

Dazu ist nothwendig, dass die Summe der Charakteristiken der sechs Punkte $= (0)$ sei, und diese Bedingung zusammen mit der zweiten, dass nicht vier der Punkte in einer singulären Tangentialebene liegen, ist auch hinreichend.

Sind nämlich $(\varkappa_1)$, $(\varkappa_2)$, $(\varkappa_3)$, $(\varkappa_4)$, $(\varkappa_5)$, $(\varkappa_6)$ die Charakteristiken von sechs solchen Punkten, so darf nicht die Summe von vieren derselben $= (0)$ sein, und daraus folgt, dass die fünfzehn Summen von je zweien derselben, $(\varkappa_1 + \varkappa_2)$, alle von einander verschieden sind, und mithin sämmtliche von (0) verschiedenen Charakteristiken ergeben müssen. Wäre also die Summe $(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4 + \varkappa_5 + \varkappa_6)$ nicht $= (0)$, so müsste sie $= (\varkappa_i + \varkappa_k)$ sein, und die Summe der vier übrigen $(\varkappa)$ würde gegen die Voraussetzung $= (0)$ sein. Umgekehrt, wenn die Summe sämmtlicher $(\varkappa) = (0)$ ist, so kann nicht schon die Summe von vieren derselben $= (0)$ sein, da die beiden andern von einander verschieden sein müssen, und daher bilden keine vier derselben ein Tetraeder der ersten oder zweiten Art. Es wird sich ergeben, dass falls nicht vier derselben in einer singulären Tangentialebene liegen, dieselben von einander unabhängig sind.

Geht man, um ein solches System von Punkten zu bestimmen, von einem beliebigen Tetraeder der dritten Art aus, so kann man die hinzuzufügenden beiden Punkte auf zwei Arten wählen. Dabei entsteht, wenn

man alle möglichen Tetraeder dritter Art zu Grunde legt, jedes solche System fünfzehn mal, so dass die Gesammtanzahl derselben $\frac{1440}{15}\cdot 2 = 192$ beträgt.

Wählen wir das Tetraeder dritter Art

(0), (12), (13), (24),

so lässt sich die Summe der Charakteristiken der vier Eckpunkte (34) auf folgende acht Arten zerlegen:

(0), (34); (13), (14); (23), (24); (53), (54); (63), (64);
(15), (26); (16), (25); (12), (56).

Hiervon aber können nur die beiden Zerlegungen (53), (54); (63), (64) gebraucht werden, da bei allen anderen vier Punkte in einer Ebene liegen würden. Wir erhalten also das System:

(0), (12), (13), (24), (35), (45),

welches die verlangte Eigenschaft besitzt.

Nehmen wir diese sechs Punkte irgend wie als gegeben an, so sind damit unmittelbar die folgenden singulären Tangentialebenen bestimmt:

(I.)	(1)	durch	(0)(12)(13),	(123)	durch	(12)(13)(45),
	(2)	-	(0)(12)(24),	(124)	-	(12)(24)(35),
	(3)	-	(0)(13)(35),	(126)	-	(12)(35)(45),
	(4)	-	(0)(24)(45),	(135)	-	(13)(35)(24),
	(5)	-	(0)(35)(45),	(136)	-	(13)(24)(45).

Daraus ergiebt sich nun das ziemlich unerwartete Resultat, ***dass aus den gegebenen sechs Knotenpunkten die übrigen linear construirt werden können.***

Wir erhalten die fehlenden zehn Knotenpunkte geradezu als Schnittpunkte von je dreien dieser Ebenen, nämlich:

(II.)	(14)	als Schnitt von	(1) (4)(124),	(26)	als Schnitt von	(2)(126)(135),
	(15)	- - -	(1) (5)(135),	(34)	- - -	(3) (4)(126),
	(16)	- - -	(1)(126)(136),	(36)	- - -	(3)(136)(124),
	(23)	- - -	(2) (3)(123),	(46)	- - -	(4)(123)(135),
	(25)	- - -	(2) (5)(136),	(56)	- - -	(5)(123)(124).

Da die gegebenen sechs Punkte sich den Symbolen (0), (12), (13), (24), (35), (45) auf verschiedene Arten zuordnen lassen, so werden sich

auch die noch fehlenden 10 Knotenpunkte, und damit die ganze Fläche, auf mehrere Arten, jedoch in endlicher Anzahl, bestimmen lassen. Die Anzahl dieser Bestimmungsarten beträgt *zwölf,* wie sich auf folgende Weise ergiebt.

Bezeichnen wir die sechs gegebenen Punkte mit $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, so ergiebt sich aus (I.), dass von zwei Ebenen, welche durch je drei dieser Punkte, etwa durch (A_1, A_2, A_3); (A_4, A_5, A_6) gehen, immer die eine singuläre Tangentialebene ist, die andere nicht. Wir können also annehmen, dass entweder (A_1, A_2, A_3) oder (A_4, A_5, A_6) singuläre Tangentialebene sein soll und dem entsprechend entweder das erste oder das zweite Tripel mit ((0), (12), (13)) zusammenfallen lassen. Die durch (I.) bestimmten singulären Tangentialebenen erhält man dann, wenn man die Punkte A_4, A_5, A_6 in irgend einer Weise den geraden Linien (A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2) zuordnet, also auf sechs verschiedene Arten, in der Weise:

$$\begin{array}{lll} (A_1A_2A_3); & (A_5A_6)(A_2); & (A_5A_6)(A_3); \\ (A_2A_3)(A_4); & (A_6A_4)(A_3); & (A_6A_4)(A_1); \\ (A_3A_1)(A_5); & (A_4A_5)(A_1); & (A_4A_5)(A_2); \\ (A_1A_2)(A_6); & & \end{array}$$

indem man noch $(A_1A_2A_3)$ mit $(A_4A_5A_6)$ vertauscht, erhält man zwölf Arten der Bestimmung jener zehn Ebenen, welches die einzigen sind, die zu verschiedenen Resultaten führen. Es ist damit auch die Fläche durch diese sechs Knotenpunkte auf zwölf Arten bestimmt, aber die Gleichungen derselben lassen sich, ebenso wie die Coordinaten der übrigen zehn Knotenpunkte rational durch die der gegebenen Punkte ausdrücken. Die analytische Bestimmung dieser Coordinaten ergiebt das gleiche Resultat. Nehmen wir das Tetraeder (0) (12) (13) (24) als Fundamental-Tetraeder und setzen:

$$\xi_1 = \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\1\,0\end{Bmatrix}(v_1, v_2), \quad \xi_2 = \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\1\,1\end{Bmatrix}(v_1, v_2),$$

$$\xi_3 = \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\1\,0\end{Bmatrix}(v_1, v_2)+\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,1\end{Bmatrix}(v_1, v_2),$$

$$\xi_4 = \vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1\,0\\1\,0\end{Bmatrix}(v_1, v_2)-\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}(v_1, v_2),$$

so dass $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ die Gleichungen der Seitenflächen des Coordinaten-Tetraeders sind, so ergeben sich die Coordinaten der zwölf übrigen

Knotenpunkte proportional den folgenden Grössen:

(III.)

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
$(35)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}$
$(45)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}$
$(36)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}$
$(46)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}$
$(34)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^4\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}-\vartheta^4\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}$
$(56)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^4\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}+\vartheta^4\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}$
$(14)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$	0	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}$
$(15)=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	0	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&1\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}$.
$(16)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	0	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&1\\1&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}$
$(23)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&0\end{Bmatrix}$	0	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&1\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&0\\0&0\end{Bmatrix}$
$(25)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$-\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&1\\0&0\end{Bmatrix}$	0	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&1\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\1&0\end{Bmatrix}$
$(26)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	$-\vartheta^2\begin{Bmatrix}1&1\\1&1\end{Bmatrix}$	0	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&0\end{Bmatrix}$	$\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&1\\1&0\end{Bmatrix}\vartheta^2\begin{Bmatrix}0&0\\0&1\end{Bmatrix}$.

Drückt man die constanten Thetawerthe durch die algebraischen Moduln aus, indem man die oben gemachte Annahme

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ = \infty, & 0, & \varkappa_1^2, & \varkappa_2^2, & \varkappa_3^2, & 1 \end{array}$$

festhält, und berücksichtigt, dass jede der vier Coordinaten mit einem beliebigen constanten Factor multiplicirt werden kann, und dass es überdies nur auf die Verhältnisse der vier Coordinaten ankommt, so erhält man die folgenden Werthe für die Coordinaten der sechzehn Knotenpunkte:

(IV.)

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
$(0) = \binom{0\,0}{0\,0}$	0	0	0	1
$(12) = \binom{0\,0}{0\,1}$	0	0	1	0
$(13) = \binom{1\,1}{0\,1}$	0	1	0	0
$(24) = \binom{1\,1}{1\,0}$	1	0	0	0
$(35) = \binom{1\,0}{1\,0}$	1	1	1	1
$(45) = \binom{1\,0}{0\,0}$	$\varkappa_1^2$	$\varkappa_2^2$	$\varkappa_3^2$	1
$(36) = \binom{1\,0}{0\,1}$	$\varkappa_3^2$	1	$\varkappa_3^2$	1
$(46) = \binom{1\,0}{1\,1}$	$\varkappa_1^2\varkappa_3^2$	$\varkappa_2^2$	$\varkappa_3^2$	$\varkappa_3^2$
$(34) = \binom{0\,0}{1\,0}$	$\varkappa_3^2\varkappa_{21}^2$	$\varkappa_2^2\varkappa_{21}^2$	$\varkappa_3^2\varkappa_{21}^2$	$\varkappa_2^2\varkappa_1'^2-\varkappa_3^2\varkappa_2'$
$(56) = \binom{0\,0}{1\,1}$	$\varkappa_1^2\varkappa_{21}^2$	$\varkappa_{21}^2$	$\varkappa_{31}^2\varkappa_1'^2+\varkappa_1^2\varkappa_{21}^2$	$\varkappa_{21}^2$
$(14) = \binom{1\,1}{1\,1}$	0	$\varkappa_2^2$	$\varkappa_3^2$	$\varkappa_2^2$
$(15) = \binom{0\,1}{1\,1}$	0	$\varkappa_{21}^2$	$\varkappa_{31}^2$	$\varkappa_{31}^2$
$(16) = \binom{0\,1}{0\,0}$	0	$\varkappa_{21}^2$	$\varkappa_1'^2\varkappa_3^2$	$\varkappa_1'^2$
$(23) = \binom{1\,1}{0\,0}$	$\varkappa_1^2$	0	$\varkappa_1^2$	1
$(25) = \binom{0\,1}{1\,0}$	$-\varkappa_{21}^2\varkappa_3^2$	0	$\varkappa_{32}^2\varkappa_3^2$	$\varkappa_{32}^2$
$(26) = \binom{0\,1}{0\,1}$	$-\varkappa_{21}^2$	0	$\varkappa_2'^2$	$\varkappa_2'^2$.

Durch die ersten sechs dieser Punkte sind also die Moduln des zu Grunde liegenden hyperelliptischen Integrals rational bestimmt und die Coordinaten der übrigen Knotenpunkte sind durch diese rational ausgedrückt. Durch Vertauschung der Charakteristiken, wie oben gezeigt, erhält man die übrigen elf Arten der Bestimmung der Knotenpunkte aus den gegebenen sechs. Diese Ausdrücke, welche auch leicht ohne Vermittlung der Thetafunctionen als

Coordinaten der Schnittpunkte der in (II.) zusammengestellten Ebenen erhalten werden können, setzen zugleich ausser Zweifel, dass die sechs Knotenpunkte von denen wir ausgingen, wirklich jede beliebige gegebene Lage haben können.

In einem besonderen Fall können vier Knotenpunkte in eine Ebene fallen, welche nicht singuläre Tangentialebene ist. Es können dies nur die vier Ecken eines Tetraeders der zweiten Art sein und die Werthe der Coordinaten in der Tafel (III.) zeigen, dass hierfür, falls etwa die Punkte

$$(12), \quad (13), \quad (24), \quad (34)$$

in eine Ebene fallen sollen, die nothwendige und hinreichende Bedingung die ist:

$$\vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,1\\0\,0\end{Bmatrix} = \vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,0\end{Bmatrix},$$

was noch zur Folge hat:

$$\vartheta^4\begin{Bmatrix}1\,0\\0\,1\end{Bmatrix} = \vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}, \quad \vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\end{Bmatrix} = \vartheta^4\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\end{Bmatrix},$$

und die Ausdrücke (III.) oder (IV.) zeigen weiter, dass in Folge davon auch die drei übrigen zugehörigen Tetraeder zweiter Art

$$(0)(14)(23)(56),$$
$$(15)(16)(45)(46),$$
$$(25)(26)(35)(36)$$

in Ebenen ausarten, so dass in diesen Fällen immer viermal vier Knotenpunkte in einer Ebene liegen, die nicht singuläre Tangentialebene ist. Die hierbei auftretenden Thetafunctionen gehören in Folge der oben aufgestellten Bedingungsgleichung zu denen, welche mittelst einer Transformation zweiten Grades durch elliptische Thetafunctionen ausgedrückt werden können. Dieser Fall tritt ein bei der *Fresnel*schen Wellenfläche und ihren projectivischen Umformungen. Man erhält auf diese Weise für die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte der Wellenfläche die Ausdrücke:

$$x = b\sin\mathrm{am}(u,\varkappa)\,\Delta\mathrm{am}(v,\lambda),$$
$$y = a\cos\mathrm{am}(u,\varkappa)\cos\mathrm{am}(v,\lambda),$$
$$z = a\,\Delta\mathrm{am}(u,\varkappa)\sin\mathrm{am}(v,\lambda),$$

$$\varkappa^2 = \frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}, \quad \varkappa'^2 = \frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}; \quad \lambda^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}, \quad \lambda'^2 = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2},$$

welche der Gleichung der Wellenfläche

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2} = 1$$

identisch genügen. Die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ bilden zwei orthogonale Curvenschaaren auf der Fläche.

Königsberg, im August 1877.

Sätze über Determinanten und Anwendung derselben zum Beweise der Sätze von *Pascal* und *Brianchon.*

(Von Herrn *Mertens* in Krakau.)

Die Sätze von *Pascal* und *Brianchon* in der Theorie der Kegelschnitte beruhen auf einigen Determinanten-Identitäten, welche sich alle einfach aus dem folgenden Satze ableiten lassen:

Verschwindet eine ganze Function der sechs Gruppen von je drei Elementen

$$(1.)\quad (x_0 y_0 z_0),\quad (x_1 y_1 z_1),\quad (x_2 y_2 z_2),\quad (x_3 y_3 z_3),\quad (x_4 y_4 z_4),\quad (x_5 y_5 z_5),$$

welche in Bezug auf die Elemente jeder Gruppe homogen und vom zweiten Grade ist, identisch, wenn man die Elemente irgend einer Gruppe durch die entsprechenden einer anderen ersetzt, so ist diese Function bis auf einen von den Elementen (1.) unabhängigen Factor der Determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} x_0^2 & y_0^2 & z_0^2 & y_0 z_0 & z_0 x_0 & x_0 y_0 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & z_2 x_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & z_3 x_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & z_4 x_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & z_5 x_5 & x_5 y_5 \end{vmatrix}$$

gleich.

Ist nämlich φ eine solche Function und setzt man identisch

$$\varphi = Px_0^2 + Qy_0^2 + Rz_0^2 + P'y_0 z_0 + Q'z_0 x_0 + R'x_0 y_0,$$
$$\Omega = Lx_0^2 + My_0^2 + Nz_0^2 + L'y_0 z_0 + M'z_0 x_0 + N'x_0 y_0,$$

so ergeben sich aus den sechs linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi &= Px_0^2 + Qy_0^2 + \cdots \\ 0 &= Px_1^2 + Qy_1^2 + \cdots \\ 0 &= Px_2^2 + Qy_2^2 + \cdots \\ 0 &= Px_3^2 + Qy_3^2 + \cdots \\ 0 &= Px_4^2 + Qy_4^2 + \cdots \\ 0 &= Px_5^2 + Qy_5^2 + \cdots \end{aligned}$$

in bekannter Weise die Identitäten

$$L\varphi = P\Omega, \quad M\varphi = Q\Omega, \quad N\varphi = R\Omega,$$
$$L'\varphi = P'\Omega, \quad M'\varphi = Q'\Omega, \quad N'\varphi = R'\Omega$$

und durch Multiplication derselben mit $x_0'^2$, $y_0'^2$, $z_0'^2$, $y_0'z_0'$, $z_0'x_0'$, $x_0'y_0'$:

$$\Omega'\varphi = \Omega\varphi',$$

wo Ω', φ' die Resultate der Ersetzung von $x_0\, y_0\, z_0$ durch $x_0'\, y_0'\, z_0'$ in Ω, φ bezeichnen sollen. Aus der Identität

$$\frac{\varphi}{\Omega} = \frac{\varphi'}{\Omega'}$$

folgt nun, dass der Quotient $\frac{\varphi}{\Omega}$ von x_0, y_0, z_0 unabhängig ist. Ebenso ergiebt sich, dass dieser Quotient von den Elementen aller anderen Gruppen unabhängig ist.

I. Setzt man nun zur Abkürzung

$$y_p z_q - y_q z_p = u_{pq}, \quad z_p x_q - z_q x_p = v_{pq}, \quad x_p y_q - x_q y_p = w_{pq},$$
$$v_{01} w_{34} - w_{01} v_{34} = X, \quad w_{01} u_{34} - u_{01} w_{34} = Y, \quad u_{01} v_{34} - v_{01} u_{34} = Z,$$
$$v_{12} w_{45} - w_{12} v_{45} = X', \quad w_{12} u_{45} - u_{12} w_{45} = Y', \quad u_{12} v_{45} - v_{12} u_{45} = Z',$$
$$v_{23} w_{50} - w_{23} v_{50} = X'', \quad w_{23} u_{50} - u_{23} w_{50} = Y'', \quad u_{23} v_{50} - v_{23} u_{50} = Z'',$$
$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix} = S,$$

so ist die Determinante S eine Function mit den oben genannten Eigenschaften. Dass sie in Bezug auf die Elemente jeder Gruppe vom zweiten Grade und homogen ist, ist unmittelbar ersichtlich. Um aber zu beweisen, dass sie identisch verschwindet, wenn die Elemente irgend einer Gruppe durch die entsprechenden Elemente einer anderen ersetzt werden, kann man sich auf den Fall beschränken, wo $(x_0 y_0 z_0)$ durch eine andere Gruppe ersetzt wird, da der Ausdruck S durch eine cyklische Umsetzung der Gruppen (1.) nur sein Zeichen ändert.

Ersetzt man $(x_0 y_0 z_0)$ durch $(x_1 y_1 z_1)$ oder $(x_5 y_5 z_5)$, so verschwinden im ersten Falle u_{01}, v_{01}, w_{01}, im zweiten u_{50}, v_{50}, w_{50} und daher auch S.

Ersetzt man $(x_0 y_0 z_0)$ durch $(x_2 y_2 z_2)$, so verwandeln sich die Ausdrücke

$$YZ' - ZY', \quad ZX' - XZ', \quad XY' - YX',$$
$$X'', \qquad Y'', \qquad Z''$$

beziehungsweise von gewissen gemeinschaftlichen Factoren G, H abge-

sehen in

$$\begin{matrix} u_{12}, & v_{12}, & w_{12}, \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{matrix}$$

und daher S in

$$GH(u_{12}x_2+v_{12}y_2+w_{12}z_2) = 0.$$

Ersetzt man $(x_0y_0z_0)$ durch $(x_3y_3z_3)$, so werden sowohl X, Y, Z als auch X'', Y'', Z'' den Elementen x_3, y_3, z_3 proportional und daher $S = 0$.

Ersetzt man endlich $(x_0y_0z_0)$ durch $(x_4y_4z_4)$, so gehen die Ausdrücke

$$\begin{matrix} X, & Y, & Z, \\ Y'Z''-Z'Y'', & Z'X''-X'Z'', & X'Y''-Y'X'' \end{matrix}$$

von gewissen gemeinschaftlichen Factoren G', H' abgesehen beziehungsweise über in

$$\begin{matrix} x_4, & y_4, & z_4, \\ u_{45}, & v_{45}, & w_{45} \end{matrix}$$

und daher S in

$$G'H'(u_{45}x_4+v_{45}y_4+w_{45}z_4) = 0.$$

Es ist also identisch

$$S = \varepsilon\Omega,$$

wo ε von den Elementen (1.) unabhängig ist und durch Einsetzung der besonderen Werthsysteme

$$(100),\quad (010),\quad (001),\quad (011),\quad (101),\quad (110)$$

bestimmt werden kann. Man findet $\varepsilon = -1$ und demgemäss

$$(2.)\qquad S = -\Omega.$$

Auf dieser Identität beruht der *Pascal*sche Satz. Fasst man nämlich die Werthsysteme (1.) als homogene Coordinaten von sechs Punkten auf, so sind (u_{01}, v_{01}, w_{01}), (u_{12}, v_{12}, w_{12}), ... (u_{50}, v_{50}, w_{50}) die Coordinaten der Verbindungslinien der Punkte 0 und 1, 1 und 2, ... 5 und 0 und (X, Y, Z), (X', Y', Z'), (X'', Y'', Z'') die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Geraden (01) und (34), (12) und (45), (23) und (50). Liegen nun die Punkte (1.) auf einem Kegelschnitte, so verschwindet Ω und daher auch S. Dies ist aber die Bedingung, dass die genannten drei Durchschnittspunkte in einer Geraden liegen.

II. Bezeichnet man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{vmatrix}$$

in üblicher Weise mit (uvw), $(u'v'w')$ und ihre Unterdeterminanten $v_2w_3-w_2v_3$, $v_3w_1-w_3v_1$, ... $v'_2w'_3-w'_2v'_3$, $v'_3w'_1-v'_1w'_3$, ... mit U_1, U_2, ..., U'_1, U'_2, ..., so denke man sich in der Identität (2.) die Werthsysteme (1.) beziehungsweise durch

$$(U_1V_1W_1),\quad (U_2V_2W_2),\quad (U_3V_3W_3),\quad (U'_1V'_1W'_1),\quad (U'_2V'_2W'_2),\quad (U'_3V'_3W'_3)$$

ersetzt, wodurch Ω in Φ übergehen möge. Es verwandeln sich dann u_{01}, v_{01}, w_{01}, u_{12}, v_{12}, w_{12} beziehungsweise in u_3, v_3, w_3, u_1, v_1, w_1 mit dem Factor (uvw) und u_{34}, v_{34}, w_{34}, u_{45}, v_{45}, w_{45} in u'_3, v'_3, w'_3, u'_1, v'_1, w'_1 mit dem Factor $(u'v'w')$. Setzt man daher zur Abkürzung

$$\begin{array}{lll}
v_1w'_1-w_1v'_1=-\xi, & w_1u'_1-u_1w'_1=-\eta, & u_1v'_1-v_1u'_1=-\zeta\\
v_3w'_3-w_3v'_3=\xi', & w_3u'_3-u_3w'_3=\eta', & u_3v'_3-v_3u'_3=\zeta'\\
V'_1W_3-W'_1V_3=A, & W'_1U_3-U'_1W_3=B, & U'_1V_3-V'_1U_3=C\\
V'_3W_1-W'_3V_1=A', & W'_3U_1-U'_3W_1=B', & U'_3V_1-V'_3U_1=C',
\end{array}$$

so verwandelt sich S in

$$(uvw)^2(u'v'w')^2\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta'\\ \xi & \eta & \zeta\\ BC'-CB' & CA'-AC' & AB'-BA'\end{vmatrix}$$

$$=(uvw)^2(u'v'w')^2\begin{vmatrix} A & B & C\\ A' & B' & C'\\ \eta'\zeta-\zeta'\eta & \zeta'\xi-\xi'\zeta & \xi'\eta-\eta'\xi\end{vmatrix}.$$

Diese Determinante lässt sich aber mit Hülfe der Identität (2.) umformen, wenn man in derselben die Werthsysteme (1.) beziehungsweise durch

$$(3.)\qquad (u_1v_1w_1),\quad (u_2v_2w_2),\quad (u_3v_3w_3),\quad (u'_3v'_3w'_3),\quad (u'_2v'_2w'_2),\quad (u'_1v'_1w'_1)$$

ersetzt, man hat daher

$$\Phi=-(uvw)^2(u'v'w')^2\begin{vmatrix}
u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & v_1w_1 & w_1u_1 & u_1v_1\\
u_2^2 & v_2^2 & w_2^2 & v_2w_2 & w_2u_2 & u_2v_2\\
u_3^2 & v_3^2 & w_3^2 & v_3w_3 & w_3u_3 & u_3v_3\\
u_1'^2 & v_1'^2 & w_1'^2 & v'_1w'_1 & w'_1u'_1 & u'_1v'_1\\
u_2'^2 & v_2'^2 & w_2'^2 & v'_2w'_2 & w'_2u'_2 & u'_2v'_2\\
u_3'^2 & v_3'^2 & w_3'^2 & v'_3w'_3 & w'_3u'_3 & u'_3v'_3
\end{vmatrix}.$$

Fasst man die Werthsysteme (3.) als die Coordinaten der Seiten zweier Dreiecke auf, so besagt die vorstehende Identität, dass die Ecken zweier einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecke auf einem Kegelschnitte liegen.

III. Es sei

$$\begin{vmatrix} x_0 x_1 & y_0 y_1 & z_0 z_1 & y_0 z_1 + z_0 y_1 & z_0 x_1 + x_0 z_1 & x_0 y_1 + y_0 x_1 \\ x_1 x_2 & \cdot & \cdot & y_1 z_2 + z_1 y_2 & \cdot & \cdot \\ x_2 x_0 & \cdot & \cdot & y_2 z_0 + z_2 y_0 & \cdot & \cdot \\ x_3 x_4 & \cdot & \cdot & y_3 z_4 + z_3 y_4 & \cdot & \cdot \\ x_4 x_5 & \cdot & \cdot & y_4 z_5 + z_4 y_5 & \cdot & \cdot \\ x_5 x_3 & \cdot & \cdot & y_5 z_3 + z_5 y_3 & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = T.$$

Alsdann ist zunächst ersichtlich, dass T in Bezug auf jedes der Werthsysteme (1.) homogen und vom zweiten Grade ist. Ferner ist leicht zu sehen, dass T identisch verschwindet, wenn zwei der drei ersten oder der drei letzten Werthsysteme gleichgesetzt werden, weil dann die Determinante T zwei gleiche Zeilen erhält. Ersetzt man aber $(x_0 y_0 z_0)$ etwa durch $(x_4 y_4 z_4)$, so denke man sich, unter (pqr) die Determinante $\Sigma \pm x_p y_q z_r$ verstanden, die dritte, vierte, fünfte Zeile beziehungsweise mit

$$-(135), \quad (125), \quad -(123)$$

multiplicirt und zu der mit (235) multiplicirten ersten Zeile addirt. Da die Elemente der ersten Zeile alsdann sämmtlich verschwinden, so ist auch $T = 0$. Man hat daher

$$T = \varepsilon \Omega$$

und findet leicht $\varepsilon = -1$. Auf dieser Identität beruht der bekannte Satz, dass die Ecken zweier Poldreiecke eines Kegelschnitts auf einem Kegelschnitte liegen.

Krakau, December 1877.



